Kapitel V.

Invariantentheorie.

Von *H. E. Timerding* in Braunschweig.

---

§ 1. Binärformen zweiter bis vierter Ordnung.

Die Invariantentheorie beschäftigt sich mit den ganzen rationalen Funktionen, insbesondere den homogenen Funktionen oder Formen, bei denen alle Glieder bezüglich der veränderlichen Größen von derselben Dimension sind. Doch sind auf die letzteren sofort die nicht homogenen Funktionen zurückzuführen, indem man eine der Variablen $= 1$ annimmt. Die Invariantentheorie behandelt diese Formen aber nicht allgemein, sondern nur hinsichtlich ihres Verhaltens bei homogenen linearen Transformationen der Veränderlichen. *Invariante* heißt nach Sylvester (*Cambr. Dublin Math. Journ.* **6** (1851) 290) eine solche Funktion der Koeffizienten einer Form, die für die transformierte Form gebildet bis auf einen konstanten (d. h. von den Koeffizienten der Form unabhängigen) Faktor mit dem analogen, für die ursprüngliche Form gebildeten Ausdrucke übereinstimmt. Der konstante Faktor ist hierbei eine Potenz der Determinante oder des *„Moduls"* jener linearen Substitution, durch welche die Transformation der Variablen gegeben wird. Der Exponent dieser Potenz heißt das *Gewicht* der Invariante, die Dimension, zu welcher in *jedem* ihrer Glieder die Koeffizienten der Form vorkommen, der *Grad* der Invariante. Zur Unterscheidung wird die Dimension, zu welcher in einer Form die Veränderlichen vorkommen, immer als *Ordnung* bezeichnet.

Das einfachste Beispiel wird durch eine quadratische Form zweier Veränderlichen oder *Binärform zweiter Ordnung:*

$$f = a_0 x_1^2 + 2 a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2$$

gegeben. Geht diese durch die lineare Transformation:

$$x_1 = \alpha x_1' + \beta x_2', \; x_2 = \gamma x_1' + \delta x_2'$$

in die Form:

$$f = a_0' x_1'^2 + 2 a_1' x_1' x_2' + a_2' x_2'^2$$

über, so wird, wenn

$$\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma$$

den *Modul* der Substitution bezeichnet,

$$a_0' a_2' - a_1'^2 = \Delta^2 (a_0 a_2 - a_1^2).$$

Die „*Diskriminante*"

$$D = 2(a_0 a_2 - a_1^2)$$

hat also die Invarianteneigenschaft, und die letztere ist an diesem Beispiel zuerst durch Gauß (*Disquisitiones arithmeticae* 1801, *Werke* **1**, Art. 157) konstatiert worden.

Der Diskriminante D einer quadratischen Form steht die *Resultante R zweier linearen Formen*

$$u = a_1 x_1 + a_2 x_2, \; v = b_1 x_1 + b_2 x_2$$

zur Seite. Es ist

$$R = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Auch diese Diskriminante scheidet nur einen Faktor, nämlich das Quadrat des Substitutionsmoduls aus, wenn u und v durch dieselbe lineare Substitution transformiert werden, und heißt deshalb eine *simultane Invariante* von u und v.

Das System *zweier quadratischer Binärformen* ist zuerst von Boole (*Cambr. Math. Journ.* **3** (1843) 11 ff.) behandelt worden. Sind

$$f = a_0 x_1^2 + 2 a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2, \; g = b_0 x_1^2 + 2 b_1 x_1 x_2 + b_2 x_2^2$$

die beiden Formen, so kann man aus ihnen eine Form

$$f_\lambda = f + \lambda g = (a_0 + \lambda b_0) x_1^2 + 2(a_1 + \lambda b_1) x_1 x_2 + (a_2 + \lambda b_2) x_2^2$$

zusammensetzen. Die Diskriminante:

$$D_\lambda = 2\{(a_0 + \lambda b_0)(a_2 + \lambda b_2) - (a_1 + \lambda b_1)^2\}$$

dieser Form läßt sich in folgender Gestalt schreiben:

$$D_\lambda = D_{11} + 2 D_{12} \lambda + D_{22} \lambda^2.$$

Hierbei sind D_{11} und D_{22} die Diskriminanten von f und g, und es wird:

$$D_{12} = a_0 b_2 - 2 a_1 b_1 + a_2 b_0.$$

Da D_λ, D_{11}, D_{22} die Invarianteneigenschaft haben, muß sie auch D_{12} haben. D_{12} ist eine *simultane Invariante* der Formen f, g. Eine andere solche simultane Invariante ist die folgende:

$$R = D_{11} D_{22} - D_{12}^2$$

oder

$$R = 4(a_0 b_1 - a_1 b_0)(a_1 b_2 - a_2 b_1) - (a_0 b_2 - a_2 b_0)^2.$$

Diese ist die doppelte Diskriminante der aus f, g ableitbaren quadratischen Form:

$$H = (a_0 b_1 - a_1 b_0) x_1^2 + (a_0 b_2 - a_2 b_0) x_1 x_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) x_2^2.$$

Diese Form läßt sich auch schreiben:

$$H = (a_0 x_1 + a_1 x_2)(b_1 x_1 + b_2 x_2) - (a_1 x_1 + a_2 x_2)(b_0 x_1 + b_1 x_2),$$

oder mit Benutzung von Differentiationssymbolen:

$$H = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{vmatrix}.$$

Eine solche aus den partiellen Derivierten mehrerer Formen gebildete Determinante heißt *Funktional-* oder *Jacobische Determinante* (vgl. S. 156). Transformiert man f, g durch homogene lineare Substitutionen und bildet für die transformierten Formen die Form H, so unterscheidet sich der gefundene Wert von dem obenstehenden nur um eine Potenz (nämlich den Kubus) der Substitutionsdeterminante Δ. Eine Form von dieser Eigenschaft heißt, ebenfalls nach Sylvester, eine (simultane) *Kovariante* der Formen f, g. $R = 0$ ist die Bedingung dafür, daß H das Quadrat einer linearen Form wird, und gleichzeitig dafür, daß die Gleichungen $f = 0$, $g = 0$ eine gemeinsame Wurzel $x_1 : x_2$ besitzen. R heißt infolge dieser letzten Eigenschaft die Resultante von f und g. Die drei Formen f, g, H genügen der identischen Beziehung:

$$H^2 = -\tfrac{1}{2}(D_{11} g^2 - 2 D_{12} f g + D_{22} f^2).$$

Nimmt man zu den beiden Formen f, g eine *dritte quadratische Form:*

$$h = c_0 x_1^2 + 2 c_1 x_1 x_2 + c_2 x_2^2$$

hinzu, so wird die Determinante

$$D_{123} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

eine simultane Invariante (vom Gewicht 3) der drei Formen f, g, h. Nennt man D_{33} die Diskriminante von h und $D_{13} = D_{31}$, $D_{23} = D_{32}$ die zu $D_{12} = D_{21}$ analogen, für f, g zusammen mit h gebildeten Invarianten, so wird:

$$2 D_{123}^2 = \begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{vmatrix}.$$

Ferner gilt die identische Gleichung:

$$\begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & f \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & g \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & h \\ f & g & h & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Bildet man auch die zu H analogen Formen G, F für f, g zusammen mit h, so ergeben sich die weiteren Identitäten:

$$2 D_{123} \cdot f = D_{11} F + D_{12} G + D_{13} H,$$
$$2 D_{123} \cdot g = D_{21} F + D_{22} G + D_{23} H,$$
$$2 D_{123} \cdot h = D_{31} F + D_{32} G + D_{33} H,$$
$$Ff + Gg + Hh = 0.$$

Die Theorie der *Binärform dritter Ordnung* und die daran sich knüpfende Auflösung der Gleichungen dritten Grades ist von Cayley (*A fifth memoir upon Quantics*, *Philos. Trans.* **148** (1858) 429, *Papers* **2**, 527, Art. 115—127) gegeben worden. Aus der Form:

$$f = a_0 x_1^3 + 3 a_1 x_1^2 x_2 + 3 a_2 x_1 x_2^2 + a_3 x_2^2$$

lassen sich durch Differentiation zwei quadratische Formen

$$f_1 = \frac{1}{3}\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad f_2 = \frac{1}{3}\frac{\partial f}{\partial x_2}$$

herleiten, die ausgeschrieben lauten:

$$f_1 = a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2,$$
$$f_2 = a_1 x_1^2 + 2a_2 x_1 x_2 + a_3 x_2^2.$$

Bildet man deren simultane Kovariante:

$$H = (a_0 a_2 - a_1^2)x_1^2 + (a_0 a_3 - a_1 a_2)x_1 x_2 + (a_1 a_3 - a_2^2)x_2^2,$$

so ist dies eine Kovariante, die sogenannte *Hessesche Determinante* der Grundform f (vgl. S. 160). Man kann sie schreiben:

$$H = \frac{1}{36}\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2\right\}.$$

Die Diskriminante von H:

$$R = 4(a_0 a_2 - a_1^2)(a_1 a_3 - a_2^2) - (a_0 a_3 - a_1 a_2)^2$$

ist die einzig existierende Invariante von f. Setzen wir noch:

$$H_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial x_1}, \quad H_2 = \frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial x_2},$$

so wird

$$Q = f_1 H_2 - f_2 H_1$$

eine neue Kovariante von f, die ausgerechnet lautet:

$$\begin{aligned} Q = {} & (a_0^2 a_3 - 3a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3)x_1^3 \\ & + 3(a_0 a_1 a_3 - 2a_0 a_2^2 + a_1^2 a_2)x_1^2 x_2 \\ & - 3(a_0 a_2 a_3 - 2a_1^2 a_3 + a_1 a_2^2)x_1 x_2^2 \\ & - (a_0 a_3^2 - 3a_1 a_2 a_3 + 2a_2^3)x_2^3. \end{aligned}$$

Sie ist also von der dritten Ordnung. Die beiden Kovarianten H, Q und die Invariante R sind mit der Grundform f durch die Identität verknüpft:

$$Q^2 + 4H^3 + Rf^2 = 0,$$

die als die *Cayleysche Gleichung* bezeichnet wird.

Bildet man die Form:

$$= Q + \lambda f,$$

so werden deren Kovarianten, wenn man $R + \lambda^2 = \Theta$ setzt,

$$H_\lambda = \Theta \cdot H, \qquad Q_\lambda = \Theta \cdot (\lambda Q - Rf),$$

und die Invariante wird

$$R_\lambda = \Theta^2 R.$$

Unter den Formen f_λ sind zwei enthalten, welche dritte Potenzen linearer Formen u, v sind. Diese findet man für $\lambda = \pm\sqrt{-R}$, wie man sofort sieht, wenn man die Cayleysche Identität in der Form

$$(Q + \sqrt{-R} \cdot f)(Q - \sqrt{-R} \cdot f) = -4H^3$$

schreibt. Aus $Q + \sqrt{-R} \cdot f = u^3$, $Q - \sqrt{-R} \cdot f = v^3$ folgt aber

$$f = \frac{1}{2\sqrt{-R}}(u^3 - v^3) = \frac{1}{2\sqrt{-R}}(u - v)(u - \varepsilon v)(u - \varepsilon^2 v),$$

wenn ε eine primitive dritte Einheitswurzel ist. Auf diese Weise ergibt sich die Zerlegung der Binärform dritter Ordnung in Linearfaktoren und damit die Auflösung der Gleichungen dritten Grades. —

Eine *Binärform vierter Ordnung:*

$$f = a_0 x_1^4 + 4a_1 x_1^3 x_2 + 6a_2 x_1^2 x_2^2 + 4a_3 x_1 x_2^3 + a_4 x_2^4$$

hat zwei Invarianten

$$i = a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2,$$

$$j = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}.$$

Eine Kovariante, die wieder als die Hessesche Determinante zu bezeichnen ist, finden wir in dem Ausdrucke:

$$H = \left(\frac{1}{4 \cdot 3}\right)^2 \left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2\right\}.$$

Dieselbe ist von der vierten Ordnung. Eine zweite Kovariante wird durch die Funktionaldeterminante von f und H

$$T = \frac{1}{8}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial H}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial H}{\partial x_1}\right)$$

gegeben. Es gilt dann die Identität:

$$T^2 = -\{4H^3 - iHf^2 + jf^3\}\cdot$$

Diese geht, wenn man die Wurzeln der Gleichung:

$$4z^3 - iz - j = 0,$$

welche die Resolvente der Gleichung $f = 0$ heißt, mit m_1, m_2, m_3 bezeichnet, in die Form über:

$$T^2 = -4(H + m_1 f)(H + m_2 f)(H + m_3 f).$$

Auf der rechten Seite muß jeder Faktor ein vollständiges Quadrat sein, weil, besondere Ausnahmefälle abgerechnet, jeder Faktor verschieden und die linke Seite ein Quadrat ist, also läßt sich setzen:

$$H + m_1 f = -\varphi^2,\ H + m_2 f = -\psi^2,\ H + m_3 f = -\chi^2,$$

so daß

$$(m_2 - m_3)\varphi^2 + (m_3 - m_1)\psi^2 + (m_1 - m_2)\chi^2 \equiv 0$$

und

$$T = 2\varphi\psi\chi$$

wird. Aus diesen Formeln folgt die Zerlegung der Form f in Linearfaktoren. Es wird nämlich:

$$f = A u_1 u_2 u_3 u_4,$$

wobei A eine Konstante bedeutet und

$$\begin{aligned}
u_1 &= (m_2 - m_3)\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + (m_3 - m_1)\frac{\partial\psi}{\partial x_2} + (m_1 - m_2)\frac{\partial\chi}{\partial x_2},\\
u_2 &= (m_2 - m_3)\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} - (m_3 - m_1)\frac{\partial\psi}{\partial x_2} - (m_1 - m_2)\frac{\partial\chi}{\partial x_2},\\
u_3 &= -(m_2 - m_3)\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + (m_3 - m_1)\frac{\partial\psi}{\partial x_2} - (m_1 - m_2)\frac{\partial\chi}{\partial x_2},\\
u_4 &= -(m_2 - m_3)\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} - (m_3 - m_1)\frac{\partial\psi}{\partial x_2} + (m_1 - m_2)\frac{\partial\chi}{\partial x_2}
\end{aligned}$$

gesetzt werden kann. Diese Methode der Zerfällung einer Funktion vierter Ordnung in Linearfaktoren sowie die ganze Theorie der Formen vierter Ordnung geht auf Cayley zurück (a. a. O. Art. 128 ff.). Für die letzten Formeln vgl. man Gordans *Vorlesungen über Invariantentheorie* **2** (1887), 195.

Setzt man:

$$\varphi = (r_1 x_1 + r_2 x_2) \cdot (s_1 x_1 + s_2 x_2) = \xi_1 \cdot \xi_2$$

so wird:

$$\psi = \alpha(\xi_1^2 - \xi_2^2), \ \chi = \beta(\xi_1^2 + \xi_2^2).$$

Durch die lineare Substitution:

$$\xi_1 = r_1 x_1 + r_2 x_2, \ \xi_2 = s_1 x_1 + s_2 x_2$$

wird somit die Form f, da $(m_2 - m_3) f = \psi^2 - \chi^2$ ist, auf die „*kanonische*" Gestalt:

$$f = \gamma(\xi_1^4 + 6 m \xi_1^2 \xi_2^2 + \xi_2^4)$$

gebracht. Hierbei ist m durch die Gleichung bestimmt:

$$\frac{(1 + 3m^2)^3}{m^2(1 - m^2)^2} = \frac{i^3}{j^2}.$$

Bildet man die zusammengesetzte Form

$$f_{(\lambda)} = \lambda_1 f + \lambda_2 H,$$

setzt:

$$4\Omega = 4\lambda_1^3 - i\lambda_1\lambda_2^2 - j\lambda_2^3$$

und bezeichnet die Kovarianten dieser Form dritter Ordnung mit H_Ω, Q_Ω, so werden die Invarianten von $f_{(\lambda)}$:

$$i_\lambda = -12 H_\Omega, \ j_\lambda = -4 Q_\Omega,$$

und die Kovarianten:

$$H_\lambda = \frac{1}{3}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda_1} H - \frac{\partial\Omega}{\partial\lambda_2} f\right),$$

$$T_\lambda = \Omega \cdot T.$$

Die Invariante von Ω ist bis auf einen Zahlfaktor:

$$R = i^3 - j^2.$$

Dies ist die Diskriminante der Form vierter Ordnung f.

Ist $R = 0$, so hat f einen doppelten Linearfaktor, ebenso H, T aber einen fünffachen Faktor.

Wenn die drei Wurzeln m_1, m_2, m_3 der kubischen Resolvente zusammenfallen, d. h. $i = 0$ und $j = 0$ wird, hat f einen dreifachen Linearfaktor, H wird, von einem konstanten

Faktor abgesehen, die vierte Potenz und T die sechste Potenz des dreifachen Linearfaktors von f.

Wenn H von f nur um einen konstanten Faktor verschieden ist, so wird f und damit H das Quadrat einer quadratischen Form. Dann wird T der dritten Potenz dieser quadratischen Form proportional.

Wenn H identisch verschwindet, ist f die vierte Potenz einer linearen Form. Dann verschwindet auch T identisch.

Die Binärformen vierter Ordnung findet man sehr vollständig behandelt bei Clebsch, *Theorie der binären algebraischen Formen* (1872), S. 134—178.

§ 2. Binärformen beliebig hoher Ordnung.

Die Untersuchung der invarianten Bildungen einer allgemeinen Binärform n^{ter} Ordnung hat sich in drei Etappen vollzogen. Die erste ist durch die Namen Sylvester und Cayley gekennzeichnet und vor allem in Sylvesters Abhandlungen *On the Principles of the Calculus of Forms, Cambr. Dubl. Math. J.* **6** (1851), 186, 289, **7** (1852), 52, 179, **8** (1853), 62, 256, **9** (1854), 85 und in Cayleys *Memoirs upon Quantics* entwickelt, die in den *Philos. Transactions* von 1854 ab erschienen und mit Zusätzen des Verfassers abgedruckt sind in den *Collected papers* I 221, II 250, III 310, IV 513, V 527, VI 561, VII 325, VIII 147, IX 334, X 339. Den Arbeiten Sylvesters und Cayleys voraufgegangen sind die bedeutungsvollen, aber wenig bekannten Aufsätze von Boole, *Cambr. Math. J.* **3** (1843) 6, 106. Eine zusammenfassende Darstellung der ganzen Theorie findet man in G. Salmons *Lessons introductory to the modern higher algebra*, 1. Aufl. 1859. (Deutsch von W. Fiedler als *Algebra der linearen Transformationen.*) Selbständige Bedeutung kommt Brioschis *Teoria dei Covarianti* (Rom 1861) zu.

Die zweite Phase der Entwicklung bildet die Theorie von Clebsch und Gordan, die man in folgenden Werken findet: A. Clebsch, *Theorie der binären algebraischen Formen,* Leipzig 1872, Faà di Bruno, *Einleitung in die Theorie der binären Formen,* Leipzig 1891, P. Gordans *Vorlesungen über Invariantentheorie,* herausgegeben von G. Kerschensteiner, Leipzig 1887.

Die dritte Stufe ist bezeichnet durch die Arbeiten von D. Hilbert, *Math. Annalen* **36** (1890), 473 und **42** (1893), 313. (Vgl. das kurze Referat von H. S. White, *Bull. of the Americ. Math. Soc.* (2) **5** (1899), 161 und über die allgemeine

Entwicklung der Invariantentheorie den Bericht von Fr. Meyer, *Math. Ver.* **1** (1892) und dessen Referat *Enzykl.* I^1 p. 320.) Die Cayley-Sylvestersche Theorie hat sich indes durch die letzten Arbeiten Sylvesters, die neue Bahnen und Ziele eröffneten, bis in die Gegenwart weiter entwickelt. Die neuere englische Invariantentheorie kann man aus dem Buche von J. H. Grace und A. Young, *The Algebra of Invariants*, Cambridge 1902, kennen lernen.

Die Binärform n^{ter} Ordnung schreibt man gewöhnlich in der Gestalt:

$$f = a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \binom{n}{2} a_2 x_1^{n-2} x_2^2 + \cdots + a_n x_2^n,$$

wobei $\binom{n}{1}, \binom{n}{2} \cdots$ die Binomialkoeffizienten bezeichnen. Es sind dann die Bildungsgesetze zu suchen, welche die Invarianten und Kovarianten dieser Form f befolgen. Für die Invarianten und Kovarianten hat man die gemeinsame Bezeichnung *Komitanten*, die K. Reuschle (*Verh. d. Züricher Kongresses* 1898, S. 123) an Stelle des von Sylvester (*Cambr. Dubl. Math. J.* **6** (1851), 290) gebrauchten Ausdruckes Konkomitanten eingeführt hat.

Jede Kovariante ist eine homogene Funktion nicht bloß von den Veränderlichen x_1, x_2, sondern auch von den Koeffizienten $a_0, a_1 \ldots$ Demgemäß unterscheiden wir an ihr, wie bereits angegeben, ihre *Ordnung* h als die Dimension, in der die ersteren vorkommen, von dem *Grad* k als die Dimension, in der sie die letzteren enthält. Invarianten lassen sich als Kovarianten von der Ordnung 0 auffassen. Der Koeffizient eines Gliedes der Kovariante besteht aus Ausdrücken von folgender Form:

$$c \cdot a_0^{\lambda_0} a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \cdots a_n^{\lambda_n},$$

in denen c einen ganzzahligen Faktor bezeichnet und immer

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = k$$

ist. Innerhalb eines Koeffizienten hat auch für alle Glieder des ihn darstellenden Aggregates

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + \cdots + n\lambda_n = w$$

denselben Wert, der das *Gewicht* des betreffenden Koeffizienten heißt. Man drückt dies so aus, daß man sagt, die Koeffizienten der Kovarianten und insbesondere die Invarianten seien *homogene* und *isobare* Funktionen der Koeffizienten a_i. Bei dem

ersten Koeffizienten, nämlich dem von x_1^h ist das Gewicht $w = \frac{1}{2}(nk - h)$ und steigt bei jedem folgenden Koeffizienten um 1, so daß es bei dem letzten, nämlich dem von x_2^n, $\frac{1}{2}(nk + h)$ beträgt. Die erste Zahl w heißt das *Gewicht der Kovariante.* Es ist der Exponent der Potenz des Substitutionsmoduls, mit der sich bei einer linearen Transformation die Kovariante multipliziert, wie man sofort sieht, wenn man die besondere Substitution $x_1 = x_1'$, $x_2 = \Delta x_2'$ wählt. Für eine Invariante wird (da $h = 0$) das Gewicht $w = \frac{1}{2} ng$. Das Gewicht ist eingeführt worden von Cayley (*Philos. Trans.* **146** (1856) 101, *Papers* **2**, 250).

Die Komitanten einer Kovariante sind wieder Komitanten der Urform, und eine ganze rationale Funktion von Komitanten ist wieder eine Komitante, wenn alle ihre Glieder von derselben Ordnung, demselben Grade und demselben Gewichte sind.

Jede Kovariante Q genügt bestimmten *Differentialgleichungen,* die von Cayley (*Journ. f. Math.* **47** (1854), 109, *Papers* **2**, 164) angegeben sind, die aber Aronhold schon 1850 besaß, wie aus einem von Lampe (*Arch. d. Math.* (3) **1** (1901), 38) veröffentlichten Briefe hervorgeht. Diese Differentialgleichungen lauten:

$$\sum_\varrho (n-\varrho)\cdot a_\varrho \cdot \frac{\partial Q}{\partial a_\varrho} - x_1 \frac{\partial Q}{\partial x_1} = wQ,$$

$$\sum_\varrho \varrho \cdot a_\varrho \cdot \frac{\partial Q}{\partial a_\varrho} - x_2 \frac{\partial Q}{\partial x_2} = wQ,$$

$$\sum_\varrho (n-\varrho)\, a_{\varrho+1} \frac{\partial Q}{\partial a_\varrho} - x_1 \frac{\partial Q}{\partial x_2} = 0,$$

$$\sum_\varrho \varrho \cdot a_{\varrho-1} \frac{\partial Q}{\partial a_\varrho} - x_2 \frac{\partial Q}{\partial x_1} = 0.$$

Aus diesen Differentialgleichungen ist sofort zu erschließen, daß in jeder Komitante *alle* Koeffizienten der Urform vorkommen müssen. Für Invarianten ergeben sich leicht ersichtliche vereinfachte Gleichungen, indem die Derivierten nach den x verschwinden.

Die vorletzte Gleichung gestattet, aus dem ersten Gliede der Kovariante, nämlich dem mit x_1^h, sukzessive die Glieder mit $x_1^{h-1}x_2$, $x_1^{h-2}x_2^2 \cdots$, also die ganze Kovariante abzuleiten. Setzt man nämlich

$$Q = \sum_i \binom{h}{i} A_i x_1^{h-i} x_2^i,$$

so ergibt sich:

$$A_{i+1} = \frac{1}{h-i} \sum_{\varrho} (n-\varrho) a_{\varrho+1} \frac{\partial A_i}{\partial a_{\varrho}}.$$

Die Kovariante ist also völlig bestimmt durch ihr erstes Glied, welches das *Leitglied* heißt. Dies Leitglied A_0 genügt selbst der folgenden Differentialgleichung:

$$\sum_{\varrho} \varrho a_{\varrho-1} \frac{\partial A_0}{\partial a_{\varrho}} = 0,$$

und jede homogene, isobare Funktion der a_i, die dieser Differentialgleichung genügt, läßt sich als das Leitglied einer Kovariante deuten.

Diese Leitglieder werden nach Sylvester als *Seminvarianten* bezeichnet. Insbesondere heißen Seminvarianten, die nicht weiter auf andere Seminvarianten reduziert werden können, *Perpetuanten*. Z. B. erhält man bei einer Form vierter Ordnung

$$f = a_0 x_1^4 + 4 a_1 x_1^3 x_2 + 6 a_2 x_1^2 x_2^2 + 4 a_3 x_1 x_2^3 + a_4 x_2^4$$

die Seminvarianten:

$$S_0 = a_0, \qquad S_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} \qquad S_4 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix},$$

$$S_2 = a_0^2 a_3 - 3 a_0 a_1 a_2 + 2 a_1^3, \quad S_3 = a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2$$

Zwischen diesen 5 Semivarianten besteht die Beziehung:

$$4 S_1^3 + S_2^2 - S_0^2 S_2 S_3 + S_0^3 S_4 = 0.$$

Alle *Syzygien* oder identischen Relationen zwischen den Komitanten lassen sich auf solche Gleichungen zwischen den Seminvarianten reduzieren. S_0, S_1, S_2, S_3 heißen nach Sylvester die „*Grundformen*".

Führt man die Seminvarianten an Stelle der Koeffizienten $a_0, a_1 \ldots$ in die obigen Differentialgleichungen ein, so reduzieren sich diese auf *drei* Gleichungen, indem an Stelle der beiden letzten eine einzige Differentialgleichung tritt, deren Integrale sämtliche *Kovarianten* (bzw. *Invarianten*) der Urform sind. Vgl. Junker, *Math. Ann.* **64** (1907), 328.

Die Theorie der Seminvarianten ist entwickelt worden von Sylvester, *Am. Journ. of Math.* **5** (1882), 79, **6** (1883), 97, Cayley, ebenda **7** (1884), 1, 59, **15** (1893), 1 (*Papers* **12**,

239, 275, **13**, 264), Hammond, ebenda **8** (1886), 104, Perrin, *Bull. Soc. math. de France* **11** (1883), 88, Mac Mahon, *Am. Journ. of Math.* **7** (1884), 26, 259, **8** (1885), 1, d'Ocagne, *Comptes Rendus* **102** (1886), 916, **104** (1887), 961, 1364, *Bruxelles Ann. Soc. scient.* **10**^B (1886), 75, **11**^B (1887), 314, **12**^B (1888), 185, Roberts, *Proc. Lond. Math. Soc.* **21** (1889), 113. Eine zusammenhängende Darstellung gab Deruyts, *Théorie générale des formes algébriques* (Brüssel 1891). Ergänzungen dazu gab der Verfasser in den Schriften der Brüsseler Akademie: *Bull.* (3) **26** (1893), 258, **28** (1894), 157; *Mém.* **51** (1893), **52** (1894).

Man kann aus dem Leitglied A_0 die Kovariante Q auch auf folgende Art herleiten, die von Bruno (*Journ. f. Math.* **90** (1880), 186) herrührt. Man schreibe die Form f inhomogen, indem man $x_1 = x$, $x_2 = 1$ setzt und bilde sukzessive die Funktionen

$$f_0 = f,\ f_1 = \frac{1}{n}\frac{df_0}{dx},\quad f_2 = \frac{1}{n-1}\frac{df_1}{dx}\cdots$$

Wenn man dann in A_0

$$f_0,\ f_1,\ f_2 \ldots \text{ für } a_0,\ a_1,\ a_2 \ldots$$

schreibt, so geht A_0 in Q über. Daraus folgt mit Rücksicht auf die Differentialgleichung, der A_0 genügt, daß jede isobare, homogene Funktion Q von $f_0, f_1, f_2 \ldots$, die der Bedingung genügt:

$$\sum_{\varrho} \varrho f_{\varrho-1} \frac{\partial Q}{\partial f_{\varrho}} = 0,$$

als Funktion von x betrachtet eine Kovariante der Funktion f darstellt.

Von Interesse ist auch die Darstellung der In- und Kovarianten durch die Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ der Gleichung $f = 0$, in der man sich f inhomogen geschrieben zu denken hat. Zunächst muß jede Kovariante eine homogene, ganze Funktion der Differenzen $\alpha_i - \alpha_j$ und $\alpha_i - x$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ sein. In jedem Gliede dieser Funktion muß ferner sowohl jede der Wurzeln α_i wie auch die Variable x gleich oft vorkommen, außerdem muß der ganze Ausdruck symmetrisch bezüglich der Wurzeln α_i sein, d. h. sich nicht ändern, wenn man die Wurzeln beliebig vertauscht. Sind diese Bedingungen erfüllt, so hat man aber auch immer eine Kovariante oder, wenn die Differenzen $\alpha_i - x$ ganz fehlen, eine Invariante von f vor sich. (Vgl. Salmon, *Modern*

Algebra, Lesson XIII.) Aus irgendeinem Produkte von Wurzeldifferenzen kann man eine Kovariante von f ableiten, indem man derartige Faktoren $x - \alpha_i$ hinzufügt, daß jede Wurzel in dem Ausdrucke eine gleiche Anzahl Male vorkommt, und darauf die Summe dieses Ausdruckes und aller anderen, die aus ihm durch Permutation der Wurzeln entstehen, bildet. Dann ergibt sich immer, falls die Summe nicht identisch verschwindet, eine Kovariante von f. Wenn eine Invariante aus nur einem Gliede besteht, so muß dieses Glied alle Wurzeldifferenzen und zwar jede dieselbe gerade Anzahl Male enthalten. Diese Invarianten sind also alle die Potenzen einer, welche als das Produkt der Quadrate aller Wurzeldifferenzen auftritt und die *Diskriminante* der Gleichung $f = 0$ ist; sie verschwindet, wenn zwei Wurzeln dieser Gleichung einander gleich werden. Sie ist eine Invariante $2(n-1)^{\text{ten}}$ Grades (vgl. S. 274).

Man erkennt leicht, daß der Ausdruck irgendeiner Komitante für die Wurzeldifferenzen mindestens von demselben Grade ist wie die Urform, also vom n^{ten}. Daraus kann man weiter schließen, daß von einer Form n^{ter} Ordnung alle Invarianten verschwinden, wenn sie einen ν-fachen Linearfaktor hat und $\nu > \frac{n}{2}$ ist.

Als eine naturgemäße Erweiterung der einfachen Binärform erscheinen Formen, die *mehrere Paare von Veränderlichen* und zwar jedes Paar in jedem Gliede zu derselben Dimension enthalten, die also aus einer gewöhnlichen Binärform von x_1, x_2 entstehen, indem man in dieser die Koeffizienten wieder als Formen gleicher Ordnung von neuen Variablen y_1, y_2 ansieht usw. Wir wollen eine solche Form eine *Simultanform* nennen.

Man kann nun solche Simultanformen aus einer gewöhnlichen Binärform ableiten durch einen Prozeß, welcher als *Polarenbildung* bezeichnet wird und den wir auch als Plückerschen *Prozeß* bezeichnen können. Er wird in der folgenden Weise definiert:

$$\Delta_y f = \frac{1}{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} y_2\right).$$

Durch r-malige Anwendung resultiert die sogenannte r^{te} Polare der vorgelegten Form n^{ter} Ordnung f:

$$\Delta_y^r f = \frac{1}{n(n-1)\cdots(n-r+1)} \sum_{\varrho=0}^{r} \frac{\partial^r f}{\partial x_1^{r-\varrho}\partial x_2^{\varrho}} y_1^{r-\varrho} y_2^{\varrho}.$$

Nach dieser Definition ist der Satz evident, daß die $(r+s)^{\text{te}}$ Polare die s^{te} Polare der r^{ten} Polare ist. Man erhält die sukzessiven Polaren, indem man die Form $f_\lambda = f(x_1 + \lambda y_1, x_2 + \lambda y_2)$ nach Potenzen von λ entwickelt. Diese Entwicklung kann man schreiben:

$$f_\lambda = f + \binom{n}{1} \Delta_y f \cdot \lambda + \binom{n}{2} \Delta_y^2 f \cdot \lambda^2 + \cdots + \Delta_y^n f \cdot \lambda^n.$$

Der Koeffizient des letzten Gliedes, $\Delta_y^n f$, ist die Form f, nur gebildet für die Variablen y_1, y_2. Bildet man die Form $f(\xi_1 y_1 + \eta_1 y_2, \xi_2 y_1 + \eta_2 y_2)$, d. h. transformiert man die vorgelegte Form durch eine lineare Substitution und schreibt die transformierte Form:

$$f = a'_0 y_1^n + \binom{n}{1} a'_1 y_1^{n-1} y_2 + \binom{n}{2} a'_2 y_1^{n-2} y_2 + \cdots + a'_n y_2^n,$$

so wird hierin der Koeffizient

$$a_r' = \Delta_\eta^r f(\xi),$$

d. h. die nach η_1, η_2 gebildete r^{te} Polare der für die Variablen ξ_1, ξ_2 genommenen Form f. Die Polaren $U = \Delta_y^r f(x)$ genügen der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x_2 \partial y_1} = 0.$$

Umgekehrt läßt sich jede Simultanform, welche dieser Differentialgleichung genügt, als Polare einer gewöhnlichen Binärform gewinnen.

Führt man die Polarenbildung an irgendeiner Kovariante einer Simultanform aus (diese Kovariante ist im allgemeinen selbst eine Simultanform), so entstehen neue Kovarianten der Simultanform. *Die Polarenbildung ist ein invarianter Prozeß.*

Die gleiche Eigenschaft kommt der folgenden, an einer Kovariante Q ausgeführten Operation zu:

$$\Omega Q = \frac{1}{pq}\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x_2 \partial y_1}\right).$$

Diese Operation heißt der *Cayleysche* oder *Omega-Prozeß* (Cayley, *Cambr. Dubl. Math. Journ.* **1** (1846), 104, *Papers* **1**, 95) p, q sind die Ordnungen der Kovariante für die Variablenpaare x und y. Die charakteristische Eigenschaft einer Polare U drückt sich dann einfach so aus, daß $\Omega U = 0$ wird.

Es ist nun von Wichtigkeit, daß sich jede Simultanform in bestimmter Weise auf Polarformen zurückführen läßt. Diese Zurückführung wird durch die *Clebsch-Gordansche Formel* gegeben. Ist die Simultanform F von der n^{ten} Ordnung für die x und von der m^{ten} für die y $(m < n)$, so wird zunächst die Polare $\Delta_x^m F$ eine Form der x allein. Da ferner ΩF von der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung für die x und von der $(m-1)^{\text{ten}}$ für die y ist, wird auch $\Delta_x^{m-1}\Omega F$ eine Form der x allein, usw. Die Formen der x, die man so erhält:

$$E_0 = \Delta_x^m F,\ E_1 = \Delta_x^{m-1}\Omega F, \ldots\ E_\varrho = \Delta_x^{m-\varrho}\Omega^\varrho F, \ldots E_m = \Omega^m F,$$

nennt Gordon die *Elementarkovarianten von F*. Dann ergibt sich, wenn man abkürzend

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 = (xy)$$

setzt, die in Rede stehende Formel:

$$F = \sum_{\varrho=0}^{m} (m,n)_\varrho \Delta_y^{m-\varrho} E_\varrho \cdot (xy)^\varrho,$$

durch welche die Reduktion der allgemeinen Simultanform F auf Polarformen $\Delta_y^{m-\varrho} E_\varrho$ geleistet wird. Daß noch andere Faktoren, die hier durch die Potenzen des Elementarfaktors (xy) vertreten sind, hinzutreten müssen, ist von vornherein klar, da eine bloße Verbindung von Polarformen wieder eine Polarform wäre. Die Entwicklung der Simultanform F nach Potenzen von (xy), die durch die Clebsch-Gordansche Formel gegeben wird, ist eindeutig bestimmt; die Zahlkoeffizienten sind dabei die folgenden:

$$(m,n)_0 = 1, \quad (m,n)_\varrho = \frac{\binom{m}{\varrho}\binom{n}{\varrho}}{\binom{m+n-\varrho+1}{\varrho}} \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, m).$$

An die Komitanten einer Binärform reihen sich naturgemäß die *simultanen Komitanten mehrerer Binärformen*, die wir auch in Betracht zu ziehen haben.

Wir greifen zunächst besondere Bildungen unter den Komitanten zweier Binärformen f, g von gleich hoher Ordnung heraus. Zu solchen Komitanten kann man gelangen, indem man die Form

$$f_\lambda = f + \lambda g$$

bildet. Ist dann Q eine Komitante k^{ten} Grades von f, so wird

die entsprechende Komitante $Q_{(\lambda)}$ für f_λ von folgender Form:

$$Q_{(\lambda)} = Q + \frac{\lambda}{1!} Q_1 + \frac{\lambda^2}{2!} Q_2 + \cdots \frac{\lambda^k}{k!} Q_k.$$

In diesem Ausdrucke sind $Q_1, Q_2 \ldots$ simultane Komitanten von f und g. Nehmen wir für die Form g die folgende:

$$g = b_0 x_1^n + \binom{n}{1} b_1 x_1^{n-1} x_2 + \binom{n}{2} b_2 x_1^{n-2} x_2^2 + \cdots + b_n x_2^n,$$

so wird

$$Q_{\varrho+1} = \delta Q_\varrho,$$

wenn wir durch das δ-Zeichen den folgenden Prozeß ausdrücken:

$$\delta Q_\varrho = \frac{\partial Q_\varrho}{\partial a_0} b_0 + \frac{\partial Q_\varrho}{\partial a_1} b_1 + \cdots + \frac{\partial Q_\varrho}{\partial a_n} b_n.$$

Diese Operation wird als *Aronholdscher Prozeß* bezeichnet.

Ausgerechnet ergibt sich für Q_ϱ der Wert:

$$Q_\varrho = \sum_{\varkappa, \lambda \cdots \nu} \frac{\partial^\varrho Q}{\partial a_\varkappa \partial a_\lambda \cdots \partial a_\nu} b_\varkappa b_\lambda \cdots b_\nu.$$

Alle aus einer Komitante Q so folgenden Komitanten Q_ϱ heißen nach Cayley deren *Emananten* (Cayley, *Papers* **2**, p. 321).

So geht aus jeder Invariante einer Binärform eine Kovariante derselben hervor und jede Kovariante in eine andere über, deren Grad um 1 geringer und deren Ordnung um n höher ist.

Man kann den Aronholdschen Prozeß auch auf irgendeine simultane Komitante $\mathfrak{Q}$ zweier Formen gleicher Ordnung f, g anwenden. Hierbei kann insbesondere der Fall eintreten, daß

$$\delta \mathfrak{Q} \equiv 0$$

wird. Dann heißt $\mathfrak{Q}$ eine *Kombinante* der beiden Formen f, g. (Vgl. Sylvester, *Cambr. Dubl. M. J.* **8** (1853), 256.) Sie hat die charakteristische Eigenschaft, daß sie sich nur um einen konstanten, d. h. von den Koeffizienten der Formen unabhängigen Faktor ändert, wenn man für f und g irgend zwei Formen aus dem „Formenbüschel" $f + \lambda g$ nimmt. Daraus folgt, daß, wenn wir den früheren Ausdruck für die Komitanten $Q_{(\lambda)}$ der Form $f + \lambda g$ als Funktion von λ betrachten, jede Invariante dieser Funktion eine Kombinante der Formen f, g ist.

Auch ergibt sich, daß jede simultane Komitante der Formen f, g, welche deren Koeffizienten $a_0, a_1, a_2 \ldots, b_0, b_1, b_2 \ldots$ nur in den Verbindungen $a_0 b_1 - a_1 b_0$, $a_0 b_2 - a_2 b_0$, $a_1 b_2 - a_2 b_1 \ldots$ enthält, also nur von den Determinanten der Matrix

$$\left\| \begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 \ldots a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 \ldots b_n \end{matrix} \right\|$$

abhängt, eine Kombinante ist.

Gordan, *Math. Ann.* **3** (1871), 355, gewinnt alle Kombinanten aus einer *Fundamentalkombinante*:

$$F = \frac{f(x_1, x_2)\, g(y_1, y_2) - g(x_1, x_2)\, f(y_1, y_2)}{x_1 y_2 - x_2 y_1},$$

deren Invarianten- und Kombinanteneigenschaft offensichtlich ist, indem er diese Simultanform F nach Potenzen von (xy) entwickelt. Die Koeffizienten in dieser Entwicklung sind wieder Kombinanten, aus denen sich alle anderen rational ableiten lassen.

Schreibt man die Simultanform F nach Ausführung der Division in der Gestalt

$$F = \sum_{\varrho, \sigma = 0}^{n-1} c_{\varrho, \sigma} x_1^{\varrho} x_2^{n-1-\varrho} y_1^{\sigma} y_2^{n-1-\sigma},$$

wobei $c_{\varrho\sigma} = c_{\sigma\varrho}$ wird, so ist der Fall besonders merkwürdig, wo die Gleichungen $f(x_1, x_2) = 0$, $g(x_1, x_2) = 0$ eine gemeinsame Wurzel $x_1 : x_2$ haben. Dann muß F für diesen Wert von $x_1 : x_2$ unabhängig von den Werten der y verschwinden. Es bestehen also die n Gleichungen:

$$\sum_{\varrho = 0}^{n-1} c_{\varrho\sigma} x_1^{\varrho} x_2^{n-1-\varrho} = 0 \qquad (\sigma = 0, 1 \ldots n-1)$$

für die n Größen $x_1^{\varrho} x_2^{n-1-\varrho}$. Durch die Elimination dieser n Größen aus den n Gleichungen ergibt sich, daß die Determinante

$$R = |c_{\varrho\sigma}|$$

verschwinden muß. Dies ist die Cayleysche *Form* der *Resultante* zweier Binärformen gleicher Ordnung (Cayley, *Journ. f. Math.* **53** (1857), 366, *Papers* **4**, 38). (Vgl. S. 271.)

Führt man den Aronholdschen Prozeß für die Form f und statt der Form g für die n^{te} Potenz einer Linearform aus,

für welche wir $z_2 x_1 - z_1 x_2$ nehmen, so wird zu setzen sein:

$$(b_0, b_1, b_2 \dots b_n) = (z_2^n, -z_1 z_2^{n-1}, z_1^2 z_2^{n-2} \dots (-1)^n z_1^n)$$

und der Aronholdsche Prozeß geht in einen anderen über, der nach Cayley (*Phil. Trans.* **146** (1856), *Papers* **2**, 321) als *Evektantenbildung* bezeichnet wird. Wir wollen ihn durch das Symbol $\mathfrak{E}$ kennzeichnen, so daß die Evektante einer Komitante Q zu setzen ist:

$$\mathfrak{E} Q = \frac{\partial Q}{\partial a_n} z_1^h - \frac{\partial Q}{\partial a_{n-1}} z_1^{n-1} z_2 + \cdots \pm \frac{\partial Q}{\partial a_0} z_2^n .$$

Lassen wir z_1, z_2 mit x_1, x_2 zusammenfallen, so ist dies eine neue Komitante der Grundform f. Der Grad derselben ist um 1 niedriger und ihre Ordnung um n höher als die von Q.

§ 3. Die Cayley-Aronholdsche Symbolik.

Cayley hat in der Arbeit, welche die Grundlage der ganzen Invariantentheorie gebildet hat, auf den nach ihm benannten Ω-Prozeß eine Ableitung der Komitanten gegründet (*Cambr. Dubl. Math. Journ.* **1** (1846), 104, *Journ. f. Math.* **30**, 1, *Papers* **1**, 117), die von den bisher angeführten Methoden zur Aufstellung von In- und Kovarianten wesentlich verschieden ist und in ihrer formellen Weiterbildung durch Aronhold und Clebsch große Bedeutung gewonnen hat. Man vgl. die grundlegende Arbeit von Clebsch, *Journ. f. Math.* **59** (1861), 1, aus welcher die Grundgedanken und das Charakteristische der Methode klarer zu erkennen sind als aus den auf der formalen Vollendung der Theorie basierten Lehrbüchern. Diese Arbeit bildet den Wendepunkt in Clebschs wissenschaftlicher Tätigkeit und inauguriert gleichzeitig die eine Zeitlang in Deutschland bestehende Herrschaft der analytisch-geometrischen Disziplinen. Cayley wendet den Ω-Prozeß auf das Produkt $f \cdot g$ zweier Formen n^{ter} und m^{ter} Ordnung an, von denen er die erste mit den Variablen x_1, x_2, die zweite mit den Variablen y_1, y_2 geschrieben denkt. Es ergibt sich dann:

$$\Omega\,[f(x) \cdot g(y)] = \frac{1}{nm} \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial g(y)}{\partial y_2} - \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial g(y)}{\partial y_1} \right].$$

Nun kann man hinterher die y mit den x zusammenfallen lassen. Wir wollen dies ausdrücken, indem wir ω statt Ω schreiben, und finden dann:

$$\omega(f\cdot g)=\{\Omega[f(x)\cdot g(y)]\}_{y=x}=\frac{1}{nm}\left[\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial g(x)}{\partial x_2}-\frac{\partial f(x)}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial g(x)}{\partial x_1}\right].$$

Die so gefundene Kovariante ist die *Jacobische* oder *Funktionaldeterminante* der Formen f, g. Bei wiederholter Anwendung dieses Prozesses ergibt sich:

$$\omega^r(f\cdot g)=\frac{(n-r)!\,(m-r)!}{n!\quad m!}\sum_{\varrho=0}^{r}(-1)^\varrho\binom{r}{\varrho}\frac{\partial^r f}{\partial x_1^{r-\varrho}\partial x_2^\varrho}\cdot\frac{\partial^r g}{\partial x_1^\varrho\partial x_2^{r-\varrho}}.$$

Man kann hinterher auch g mit f zusammenfallen lassen und findet so z. B.:

$$\omega^2(f\cdot f)=\frac{2}{n^2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}\right)^2\right].$$

Dies ist die *Hessesche Kovariante* von f. Sind f und g insbesondere von derselben Ordnung n, so wird $\omega^n(f\cdot g)$ eine bilineare Invariante, nämlich:

$$\omega^n(f\cdot g)=\sum_{\varrho=0}^{n}(-1)^\varrho\binom{r}{\varrho}a_{r-\varrho}b_\varrho,$$

wobei $a_0, a_1, \ldots, b_0, b_1, \ldots$ die Koeffizienten von f und g sind. Läßt man wieder f und g zusammenfallen, so bekommt man einen von 0 verschiedenen Ausdruck nur, wenn die Ordnung n gerade ist, und zwar wird dann

$$\omega^n(f\cdot f)=2\left\{a_n a_0-\binom{n}{1}a_{n-1}a_1+\cdots\pm\frac{1}{2}\binom{n}{\frac{1}{2}n}a_{\frac{1}{2}n}^2\right\}.$$

Wenn die gefundene bilineare Invariante zweier Formen verschwindet, so heißen die beiden Formen *apolar*. Der Begriff stammt von Battaglini, *Napoli Rendic.* **2** (1863), 158, *Atti* **2** (1865), der Ausdruck von Reye, *Journ. f. Math.* **78** (1874), 97, **79** (1875), 159. Battaglini sagt *harmonisch konjugiert*, Rosanes, *Journ. f. Math.* **76** (1873), 312, *konjugiert*. Die Apolaritätstheorie ist ausführlich dargestellt in dem Buche von Fr. Meyer, *Apolarität und rationale Kurven*, Tübingen 1883.

Jede Binärform von ungerader Ordnung ist zu sich selbst apolar. Damit eine Form f von gerader Ordnung es ist, muß die Invariante $\omega^n(f\cdot f)$ verschwinden, die deshalb von Battaglini *Harmonizante* genannt wird.

Sind zwei Formen f, g apolar und die eine lautet in ihre Linearfaktoren zerfällt

$$f = v_1 v_2 \dots v_n,$$

so wird die andere von der Gestalt

$$g = c_1 v_1^n + c_2 v_2^n + \cdots + c_n v_n^n$$

(Rosanes, *Journ. f. Math.* **75** (1873) 166).

Zu irgend n Binärformen n^{ter} Ordnung ist mindestens *eine* Binärform n^{ter} Ordnung apolar, und die ersteren lassen sich nach dem vorigen Satze alle durch die in die n^{ten} Potenzen erhobenen Linearfaktoren der apolaren Form linear ausdrücken.

Wenn jetzt mehr als zwei Formen, f, g, h, ... vorliegen, so schreiben wir diese der Reihe nach mit den Variablen x_1, x_2; y_1, y_2; $z_1, z_2, \dots$ und können dann den Ω-Prozeß für irgend zwei dieser Variablenpaare auf das Produkt $f \cdot g \cdot h \cdots$ anwenden. Wir müssen, um auszudrücken, welche der zwei Variablenpaare wir wählen, die Bezeichnung dieser Variablen oder auch der Formen, zu denen sie gehören, als Indizes an Ω setzen, also statt einfach Ω nunmehr schreiben $\Omega_{fg}, \Omega_{fh}, \dots$ Wenden wir nun diese verschiedenen Prozesse eine beliebige Anzahl Male hintereinander an, so ergibt sich zunächst, daß das Resultat von der Reihenfolge, die wir hierbei beobachten, völlig unabhängig ist und nur davon abhängt, wie oft jeder Prozeß im ganzen angewendet worden ist. An die Stelle von

$$\Omega^r_{fg}\, \Omega^s_{fh} \dots [f(x) \cdot g(y) \cdot h(z) \cdots]$$

bringen wir dann wieder

$$\omega^r_{fg}\, \omega^s_{fh} \dots [f(x) \cdot g(x) \cdot h(x) \cdots],$$

indem wir die Variablenpaare x, y, z, ... zusammenfallen lassen. Wenn wir nun symbolisch

$$\omega_{fg} = f_1 g_2 - f_2 g_1 \text{ usw.}$$

setzen, so ergibt sich folgende einfache Regel zur Auswertung des vorstehenden Ausdruckes. Man rechne den Ausdruck

$$(f_1 g_2 - f_2 g_1)^r (f_1 h_2 - f_2 h_1)^s \cdots$$

aus, als ob die Symbole $f_1, f_2, \dots$ Zahlen bedeuteten. Dann

ersetze man jedes vorkommende Glied wie

$$\alpha f_1^{\nu_1} f_2^{\nu_2} g_1^{\mu_1} g_2^{\mu_2} h_1^{\lambda_1} h_2^{\lambda_2} \cdots$$

durch das entsprechende Produkt von Differentialquotienten:

$$\alpha \frac{(n-\nu)!\,(m-\mu)!\,(l-\lambda)!}{n! \quad m! \quad l!} \cdots \frac{\partial^\nu f}{\partial x_1^{\nu_1} \partial x_2^{\nu_2}} \cdot \frac{\partial^\mu g}{\partial x_1^{\mu_1} \partial x_2^{\mu_2}} \cdot \frac{\partial^\lambda h}{\partial x_1^{\lambda_1} \partial x_2^{\lambda_2}} \cdots,$$

wenn $n, m, l, \ldots$ die Ordnungen von $f, g, h, \ldots$ bedeuten und auch $\nu = \nu_1 + \nu_2$, $\mu = \mu_1 + \mu_2$, $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2, \ldots$ von Glied zu Glied nicht wechseln. Hinterher kann man auch noch die Formen $f, g, h, \ldots$ zusammenfallen lassen und erhält dann jedesmal eine Komitante der einen Form f.

Besonders zu beachten ist der Fall, daß

$$\nu = n, \ \mu = m, \ \lambda = l, \ldots$$

ist. Dann reduzieren sich die in dem Ausdruck für die Komitante der Formen $f, g, h, \ldots$ vorkommenden Differentialquotienten auf Koeffizienten der betr. Form, indem

$$\frac{1}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial x_1^{n-\nu_2} \partial x_2^{\nu_2}} = a_{\nu_2} \quad \text{usw.}$$

wird, und es entsteht eine simultane Invariante der Formen $f, g, h, \ldots$, die in den Koeffizienten jeder dieser Formen linear ist. Aus einer solchen simultanen Invariante mehrerer Formen $f, g, h, \ldots$ kann man sich aber jede Invariante einer einzigen Form f durch Zusammenfallen der verschiedenen Formen hervorgegangen denken. Man kann nämlich umgekehrt aus der letzteren Invariante eine derartige simultane Invariante durch wiederholte Anwendung des Aronholdschen Prozesses gewinnen. Gehen wir nun auf den symbolischen Ausdruck zurück, aus dem wir die simultane Invariante hergeleitet haben, so können wir ihn durch Einführung der abkürzenden Bezeichnung $f_1 g_2 - f_2 g_1 = (fg)$ usw. schreiben

$$(fg)^r (fh)^s \cdots,$$

und als charakteristisches Merkmal ergibt sich, daß, wenn wir $f \cdot g$ für (fg) setzen usw., herauskommen muß

$$f^n g^n h^n \cdots.$$

Derart ist ein symbolischer Ausdruck für die Invarianten einer Binärform gefunden. Daß in der Tat jede Invariante so darstellbar ist, ergibt sich daraus, daß jede simultane Invariante von f, g, h, ... die für die Koeffizienten aller dieser Formen linear ist, wenn man

$$a_\varrho = f_1^{n-\varrho} f_2^\varrho, \; b_\varrho = g_1^{n-\varrho} g_2^\varrho, \ldots$$

setzt, in eine Invariante der linearen Formen

$$f_x = f_1 x_1 + f_2 x_2, \; g_x = g_1 x_1 + g_2 x_2, \ldots$$

d. h. in eine ganze rationale Funktion der Determinanten (fg), (fh), ... übergehen muß.

Läßt man die Formen f, g, h, ... alle *bis auf eine* zusammenfallen und nimmt für die übrigbleibende Form die folgende:

$$(z_2 x_1 - z_1 x_2)^p,$$

so erhält man, wenn man hinterher für z_1, z_2 wieder x_1, x_2 schreibt, eine Kovariante von f, und andererseits, da man an f_1, f_2; g_1, g_2, ... jetzt z_2, $-z_1$ oder x_2, $-x_1$ anzureihen hat, einen symbolischen Ausdruck von der Form

$$(fg)^r (fh)^s \cdots f_x^\varrho g_x^\sigma \cdots, \qquad (\varrho + \sigma + \cdots = p)$$

und dies ist der *allgemeine* symbolische Ausdruck für eine Kovariante einer Binärform, da sich jede solche auf eine simultane Invariante dieser Binärform und der Potenz einer Linearform zurückführen läßt.

Bei dieser symbolischen Schreibweise der Kovarianten ist die Grundform selbst, die ja mit zu diesen Kovarianten gehört, zu schreiben:

$$f = f_x^n = g_x^n = \cdots$$

Die so gegebene Darstellung der Komitanten hat den Vorzug, deren Bildungsweise aus einem verhältnismäßig einfachen Ausdrucke unmittelbar und vollständig erkennen zu lassen. Wie kompliziert die wirklichen Ausdrücke werden, kann man aus dem von Salmon im Anhange der *Lessons on Algebra* gegebenen Beispiele einer Invariante 15. Grades einer Form sechster Ordnung erkennen, die ausgeschrieben 13 Seiten einnimmt.

Die auseinandergesetzte Methode der Aufstellung von Komitanten läßt sich als *direkte* von einer *indirekten* Methode unter-

scheiden, diese beruht auf einer fortlaufenden Verwendung des ω-Prozesses, der von Clebsch als *Überschiebung* (*Binäre Formen*, S. 99) und später auch als *Clebschscher Prozeß* beezeichnet wurde. Man kann nämlich zuerst bilden $\omega(f \cdot f)$, $\omega^2(f \cdot f), \ldots$, darauf $\omega^s(\omega^r(f \cdot f) \cdot f)$ für $s = 1, 2, \ldots$ und so fortfahren, dann gilt der wichtige Satz, der von Gordan herrührt, *daß man jede Komitante durch sukzessive Anwendung des Überschiebungsprozesses gewinnen kann.*

Die Kovariante $\omega^r(f \cdot g)$, die Clebsch noch einfacher $(f, g)^r$ schreibt, wird in der auseinandergesetzten symbolischen Darstellung

$$(f, g)^r = (fg)^r f_x^{n-r} g_x^{n-r}.$$

Diese Darstellung bleibt äußerlich vollkommen ungeändert, wenn man die Formen f und g zusammenfallen läßt.

Die symbolische Darstellung läßt sich unmittelbar auch auf Formen mit mehreren Paaren von Veränderlichen erweitern. So wird z. B. die Darstellung der r^{ten} Polare der Form f

$$\Delta_y^r f = f_x^{n-r} f_y^r.$$

Eine allgemeine Simultanform F mit zwei Paaren von Veränderlichen ist zu schreiben:

$$F = f_x^n g_y^m,$$

und wendet man auf diese Form den Ω-Prozeß an, so ergibt sich symbolisch:

$$\Omega F = (fg) f_x^{n-1} g_y^{m-1},$$

durch r malige Anwendung:

$$\Omega^r F = (fg)^r f_x^{n-r} g_y^{m-r}.$$

In diesem symbolischen Kalkül wird die allgemeine Simultanform F von dem Produkt zweier Binärformen, die eine, f_x^n, für Variable x, die andere, g_y^m, für Variable y geschrieben, nicht unterschieden.

Eine Simultanform, die für beide Variablenpaare von gleicher Ordnung ist, besitzt zwei ausgezeichnete Bildungen, die von Gordan (*Math. Ann.* **3** (1871), 355) herrühren und zu denen wir auf folgende Art gelangen. Wir nehmen die m Formen:

$$f_x^{(i)\,m} g_y^{(i)\,m} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

die wir hinterher zusammenfallen lassen, und bilden die Invariante:

$$R = \prod_{i,j} (f^{(i)} f^{(j)}) (g^{(i)} g^{(j)}) \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, m)$$

und die Kovariante:

$$\Theta = \prod_{i,j} (f^{(i)} f^{(j)}) (g^{(i)} g^{(j)}) f_x^{(i)} g_x^{(j)} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, m-1).$$

Wählen wir für die Simultanform die oben besprochene Fundamentalkombinante, wobei $m = n - 1$ wird, so ist R die Resultante der zugrunde liegenden Formen f, g, also $R = 0$ die Bedingung, daß sie einen gemeinsamen Linearfaktor besitzen. Das identische Verschwinden von Θ aber wird die Bedingung, daß f und g *zwei* Linearfaktoren gemein haben. Stephanos (*Ann. de l'École norm.* (3) **1** (1884), 329) hat bewiesen, daß Θ die einzige Form $2(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung ist, deren n^{te} Überschiebungen mit den Grundformen f und g identisch verschwinden. Die Kovariante Θ ist eine Kombinante der Formen f und g.

Die zu $n-1$ Formen n^{ter} Ordnung apolaren Formen lassen sich in der Gestalt $f + \lambda g$ darstellen, sie bilden ein Formenbüschel. Die Kovariante Θ der Formen f, g ist als Kombinante eine Kovariante des ganzen Formenbüschels (d. h. irgend zweier Formen aus ihm) und damit auch den $n-1$ vorgelegten Formen in eindeutiger Weise zugeordnet. Es gilt dann der merkwürdige Satz, daß sich die $n-1$ Formen als lineare Kombinationen der $(n-2)^{\text{ten}}$ Derivierten von Θ nach den Veränderlichen x_1, x_2 darstellen lassen (Berzolari, *Napoli Rendic.* (2) **5** (1891), 35).

Die Regeln, die für den symbolischen Kalkül gelten, können nach dem Auseinandergesetzten keine anderen sein als die Regeln, die bei der wirklichen Zahlenrechnung für die Komitanten einer Reihe von linearen Formen

$$f_x, g_x, h_x, k_x, l_x, \ldots$$

gelten. Aber alle diese Formen werden hinterher als identisch angenommen. Es kann also ein Ausdruck, der symbolische Bedeutung hat, bei Vertauschung der Symbole $f, g, \ldots$ sich nicht ändern, und wechselt er hierbei sein Vorzeichen, so muß er identisch verschwinden. Die symbolischen Rechenregeln lassen sich auf die eine Regel zurückführen:

$$\text{(I)} \qquad f_x g_y - g_x f_y = (fg)(xy),$$

die den Fundamentalsatz für das Operieren mit linearen Binärformen darstellt. Macht man in ihr $y_1 = -h_2$, $y_2 = h_1$, so erhält man:

$$\text{(II)} \qquad f_x(gh) + g_x(hf) + h_x(fg) = 0.$$

Macht man hierin weiter $x_1 = -k_2$, $x_2 = k_1$, so entsteht:

$$\text{(III)} \qquad (fk)(gh) + (gk)(hf) + (hk)(fg) = 0.$$

Die invarianten Prozesse hat Gordan auf einen zurückgeführt, der bei Verwendung dieser Symbolik in formaler Hinsicht der einfachste ist. Er besteht darin, daß in dem symbolischen Ausdrucke $f_x g_x$ durch (fg) ersetzt wird. Diesen Prozeß bezeichnet Gordan als *Faltung*.

Auf die symbolische Darstellung der Komitanten läßt sich der Beweis eines wichtigen Satzes gründen, der als der *Hermitesche Reziprozitätssatz* (Hermite, *Cambr. Dubl. Math. Journ.* **9** (1854), 172, man vgl. Salmon, *Higher Algebra*, Lesson XIV, ferner die Erweiterung dieses Theorems betreffend Deruyts, *Bull. de l'Acad. de Bruxelles* (3) **22** (1891) und Gordan, *Gött. Nachr.* (1897), 182) bezeichnet wird. Wir setzen in dem allgemeinen symbolischen Ausdrucke einer Kovariante der Binärform f

$$-\frac{f_2}{f_1} = \alpha, \quad -\frac{g_2}{g_1} = \beta, \quad -\frac{h_2}{h_1} = \gamma, \quad \cdots \quad \frac{x_1}{x_2} = x,$$

so wird er, von einem Faktor abgesehen:

$$(\alpha - \beta)^r (\alpha - \gamma)^s \ldots (x - \alpha)^\varrho (x - \beta)^\sigma \ldots,$$

d. h. von genau derselben Form wie der oben mit Hülfe der Wurzeln α, β, ... von $f = 0$ gebildete Ausdruck. Aber hier ist die Anzahl Male n, die α und ebenso β, γ, ... vorkommt, nicht der Grad der Komitante, sondern die Ordnung der Grundform f. Zu einer Komitante k^{ten} Grades p^{ter} Ordnung einer Form n^{ter} Ordnung findet man so immer eine Komitante n^{ten} Grades p^{ter} Ordnung einer Form k^{ter} Ordnung. Einem System linear unabhängiger oder wie man sagt *asyzygetischer* Komitanten gleicher Ordnung p wird auf diese Weise wieder ein System asyzygetischer Komitanten von derselben Ordnung p zugeordnet.

Als Beispiel der Methode, die Komitanten durch sukzessive Überschiebung zu gewinnen, wollen wir das *System zweier kubischen Formen* f, g behandeln.

Durch direkte Anwendung des Überschiebungsprozesses auf die Formen selbst gewinnt man eine Kovariante vierter Ordnung

$$(1)\qquad \vartheta = (f, g),$$

drei quadratische Kovarianten

$$(2)\qquad A = (f, f)^2,\; B = (g, g)^2,\; C = (f, g)^2$$

und eine Invariante

$$(3)\qquad J = (f, g)^3.$$

Aus den drei quadratischen Formen A, B, C leitet man durch doppelte Überschiebung derselben über sich selbst und übereinander die sechs Invarianten her:

$$(4)\qquad \begin{aligned} D_{11} &= (A, A)^2,\; D_{22} = (B, B)^2,\; D_{33} = (C, C)^2, \\ D_{23} &= (B, C)^2,\; D_{31} = (C, A)^2,\; D_{12} = (A, B)^2, \end{aligned}$$

die mit den früher so bezeichneten Invarianten dreier quadratischer Formen übereinstimmen. Die einmalige Überschiebung der Formen A, B gibt eine quadratische Kovariante:

$$(5)\qquad E = (A, B).$$

Überschiebung der quadratischen Formen A, B mit den Urformen führt zu vier Kovarianten dritter Ordnung:

$$(6)\qquad \begin{aligned} P &= (f, A),\; Q = (g, B), \\ U &= (f, B),\; V = (g, A), \end{aligned}$$

und doppelte Überschiebung zu den linearen Kovarianten:

$$(7)\qquad p = (f, A)^2,\; q = (g, B)^2.$$

Gleichzeitig wird:

$$(f, C)^2 = -\frac{1}{2}p,\; (g, C)^2 = -\frac{1}{2}q.$$

Die Überschiebung der Kovarianten p, q übereinander liefert die Invariante:

$$(8)\qquad \Omega = (p, q).$$

Die Überschiebung der linearen Kovarianten p, q mit den

quadratischen Formen A, B, C liefert neue lineare Kovarianten:

$$(9) \qquad p' = (A, p),\ q' = (A, q),\ p'' = (B, p),\ q'' = (B, q).$$

Endlich ergibt die doppelte Überschiebung einer der Urformen f, g mit der kubischen Kovariante P oder Q der anderen die quadratischen Kovarianten:

$$(10) \qquad A' = (P, g)^2,\ B' = (Q, f)^2.$$

Zwischen den gefundenen acht Invarianten J, D_{ij}, Ω bestehen die Relationen:

$$\Omega^2 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{vmatrix},$$

$$2J\Omega = (D_{11}D_{22} - D_{12}^2) - 4(D_{13}D_{32} - D_{33}D_{12}),$$
$$J^2 = 2(D_{12} - D_{33}),$$

und die Resultante der Formen f, g wird:

$$R = 27\Omega - 4J^3.$$

Aus den zwei kubischen Formen f, g kann man die Kovariantenform vierter Ordnung ableiten

$$\mathfrak{f} = fq + gp.$$

Deren Invarianten werden

$$i_{\mathfrak{f}} = -2\Omega J,\quad j_{\mathfrak{f}} = 2\Omega^2,$$

und ihre Kovarianten

$$H_{\mathfrak{f}} = -4\Omega\vartheta,$$
$$T_{\mathfrak{f}} = 2\Omega\,\{g(Ap + Cq) - f(Bp + Cq)\}.$$

Das System zweier kubischen Formen hat Clebsch behandelt (*Journ. f. Math.* **67** (1867), 360) und v. Gall (*Math. Ann.* **31** (1888), 424); man vgl. außerdem Sylvester, *C. R.* **89** (1879), 828, d'Ovidio, *Torino Atti* **15** (1880), 267 und Gordans *Vorlesungen* **2**, § 32f. Das System dreier kubischen Formen hat v. Gall untersucht (*Math. Ann.* **45** (1894), 207) und das System beliebig vieler kubischen Formen Peano (*Torino Atti* **17** (1882), 580).

Das System zweier Formen vierter Ordnung wurde untersucht von Gordan, *Math. Ann.* **2** (1870), 227, d'Ovidio, *Torino Atti* **15** (1880), 301, 385, 471, **28** (1893), 447, Stroh, *Math. Ann.* **22** (1883), 290, v. Gall, ib. **33** (1889), 197, **34** (1889), 332, Brioschi, *Torino Atti* **31** (1896), 441.

Über Formen mit gemeinsamen Linearfaktoren sehe man Gordan, *Math. Ann.* **3**, Pascal, *Ann. di mat.* (2) **16** (1888), 85, *Napoli Rendic.* (2) **2** (1888), 402, *Lomb. Ist. Rendic.* **37** (1904), 917, 980.

Das System einer Form *fünfter* Ordnung findet man bei Clebsch, *Binäre Formen,* § 73—75. Vgl. auch d'Ovidio, *Torino Atti* **15** (1880), 591, Hammond, *Amer. Journ. of Math.* **8** (1886), 19, *Lond. Math. Soc. Proc.* **27** (1896), 392, Stroh, *Math. Ann.* **33** (1889), 61, **34** (1889), 354. Die Diskriminante berechnete bereits Salmon (*Cambr. Dubl. Math. Journ.* **5** (1850), 159). Die Diskriminante der Form sechster Ordnung hat Brioschi gefunden (*Ann. di mat.* (2) **1** (1868), 159, *Opere* **2**, 77), die Diskriminante einer Form siebenter Ordnung haben Gordan, *Math. Ann.* **31** (1888), 566, und Brioschi, *Ann. di mat.* (2) **26** (1898), 255, untersucht.

Das System einer Form *sechster* Ordnung findet man behandelt bei Clebsch, *Binäre Formen,* § 76ff. Über das System einer Form *siebenter* Ordnung kann man sich orientieren bei v. Gall, *Math. Ann.* **31** (1888), 318.

Das System einer Form *achter* Ordnung hat v. Gall untersucht (*Math. Ann.* **17** (1881), 31, 139).

Neben der Clebsch-Gordanschen Richtung, welche die unabhängigen Komitanten gegebener Formen in ihrem symbolischen Ausdrucke wirklich hinzuschreiben strebt, steht die abzählende Richtung von Cayley und Sylvester, welche nur die Anzahl und den Typus der unabhängigen Komitanten zu bestimmen sucht. Diese Bestimmung beruht auf der Verwendung einer „erzeugenden Funktion", d. h. einer rationalen Funktion von zwei Variablen x, a, in deren Entwicklung der Koeffizient von $a^k x^h$ die Anzahl der linear unabhängigen (asyzygetischen) Komitanten vom Grade k und der Ordnung h (deg-order k, h) liefert. Durch Siebung (tamisage) der so gefundenen Zahlen kann man zu den Anzahlen der von allen niedrigeren unabhängigen Komitanten gelangen. So gelang es Sylvester, Tabellen für die charakteristischen Zahlen der unabhängigen Komitanten aufzustellen, und er hat im *Am. Journ. of Math.* **2** (1879), 223 diese Tabellen für die Binärformen erster bis neunter Ordnungen gegeben.

§ 4. Kanonische und typische Darstellung. Erweiterungen des Invariantenbegriffes.

Eine besondere Aufgabe der Formentheorie besteht darin, die vorgelegte Grundform selbst so umzugestalten, daß sie aus einfacheren Formen in einer besonders charakteristischen Weise zusammengesetzt erscheint. Insbesondere kann sie als Summe von Potenzen linearer Formen dargestellt werden, und dies ist es, was man im engsten Sinne unter der *kanonischen Darstellung* einer Binärform versteht. Die Theorie dieser Darstellungsarten schuf Sylvester, *Cambr. Dubl. Math. Journ.* **6** (1851), 186, *Philos. Magaz.* (4) **2** (1851), 391, auch in einer selbständigen Schrift *An Essay on Canonical Forms* 1851, alles vereinigt in den *Werken* **1** (1904). Die Darstellung einer kubischen Form als Summe dritter Potenzen hatte schon Hesse erörtert (*Journ. f. Math.* **38** (1849), 262, *Werke,* 217). Bei der Ausführung dieser kanonischen Darstellung ist zu scheiden zwischen Formen ungerader und gerader Ordnung.

Jede Form f von der *ungeraden* Ordnung $n = 2\nu + 1$ läßt sich immer als Aggregat von $\nu + 1$ Potenzen linearer Formen folgendermaßen ausdrücken:

$$f = \sum_{\varrho=0}^{\nu} b_\varrho (x_1 - \alpha_\varrho x_2)^{2\nu+1}.$$

Hierbei sind die Koeffizienten α_ϱ die Wurzeln einer Gleichung $(\nu + 1)^{\text{ten}}$ Grades

$$A_0 - A_1\alpha + A_2\alpha^2 - \cdots + (-1)^{\nu+1} A_{\nu+1}\alpha^{\nu+1} = 0,$$

der *Sylvesterschen Kanonisante.* Die Symbole $A_0, A_1, \ldots, A_{\nu+1}$ bedeuten die Determinanten der Matrix:

$$\left\| \begin{matrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{\nu+1} \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{\nu+2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_\nu & a_{\nu+1} & \cdots & a_{2\nu+1} \end{matrix} \right\|.$$

Wenn eine Form f von der geraden Ordnung $n = 2\nu$ als Aggregat von ν Potenzen darstellbar sein soll, so muß die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_\nu \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{\nu+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_\nu & a_{\nu+1} & \dots & a_{2\nu} \end{vmatrix},$$

die *Katalektikante,* verschwinden. Ist dieselbe nicht Null, so ersetze man, wenn $a_{2\nu} \neq 0$ ist, die Form f durch $f - \lambda x_2^{2\nu}$ und bestimme λ so, daß die Katalektikante für diese neue Form verschwindet. Dann läßt sich $f - \lambda x_2^n$ als Summe von ν Potenzen darstellen, f mithin als Aggregat von $\nu + 1$ Potenzen, und dies ist immer auf unendlich viele Arten möglich, denn wenn man f linear transformiert, so kann man auf unendlich viele Arten erreichen, daß der Koeffizient von a_0 nicht verschwindet, weil hierzu nur erforderlich ist, daß $x_2 = 0$ *keine* Wurzel der Gleichung $f = 0$ ist.

Der kanonischen Darstellung einer Binärform steht die *typische Darstellung* zur Seite. Hierunter versteht man eine solche Umgestaltung der gegebenen Form f, daß die Veränderlichen Kovarianten und die Koeffizienten Invarianten derselben werden. Diese Darstellung findet man ausführlich abgehandelt bei Clebsch, *Binäre Formen,* 7.—9. Abschnitt; vgl. auch Gordans *Vorlesungen.*

Bei einer Form von *ungerader* Ordnung n führt man die typische Darstellung mit Hülfe zweier (für $n > 3$ immer existierenden) *linearen* Kovarianten α_x, β_x aus. Es gilt, wenn f_x irgendeine dritte lineare Form ist, die Identität:

$$f_x(\alpha\beta) = \alpha_x(f\beta) - \beta_x(f\alpha).$$

Erhebt man diese in die n^{te} Potenz, so erhält man:

$$f_x^n(\alpha\beta)^n = \sum_{\varrho=0}^{n} (-1)^\varrho \binom{n}{\varrho} (f\beta)^{n-\varrho} (f\alpha)^\varrho \alpha_x^{n-\varrho} \beta_x^\varrho.$$

Diese Gleichung kann man symbolisch deuten, indem man

$$f = f_x^n$$

annimmt, und erhält dann mit Hülfe der Invarianten

$$C_\varrho = (-1)^\varrho (f\beta)^{n-\varrho} (f\alpha)^\varrho$$

die typische Darstellung:

$$(\alpha\beta)^n \cdot f = \sum \binom{n}{\varrho} C_\varrho \alpha_x^{n-\varrho} \beta_x^\varrho.$$

Bei einer Form von der *geraden* Ordnung $n = 2\nu$ existieren für $n > 4$ immer drei *quadratische* Kovarianten, die wir schreiben:

$$\xi = \alpha_0 x_1^2 + 2\alpha_1 x_1 x_2 + \alpha_2 x_2^2,$$
$$\eta = \beta_0 x_1^2 + 2\beta_1 x_1 x_2 + \beta_2 x_2^2,$$
$$\zeta = \gamma_0 x_1^2 + 2\gamma_1 x_1 x_2 + \gamma_2 x_2^2.$$

Ist R die aus den Koeffizienten $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ dieser Gleichungen gebildete Determinante, so wird für irgendeine lineare Form $f_x = f_1 x_1 + f_2 x_2$:

$$\begin{aligned} R f_x^2 = & [(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1) f_1^2 + (\beta_2\gamma_0 - \beta_0\gamma_2) f_1 f_2 + (\beta_0\gamma_1 - \beta_1\gamma_0) f_2^2]\,\xi \\ & + [(\gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1) f_1^2 + (\gamma_2\alpha_0 - \gamma_0\alpha_2) f_1 f_2 + (\gamma_0\alpha_1 - \gamma_1\alpha_0) f_2^2]\,\eta \\ & + [(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) f_1^2 + (\alpha_2\beta_0 - \alpha_0\beta_2) f_1 f_2 + (\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0) f_2^2]\,\zeta. \end{aligned}$$

Erhebt man diese Gleichung in die ν^{te} Potenz, so geht sie über in eine Gleichung von der Form:

$$R^\nu f_x^n = \sum_{\varrho,\sigma} C_{\varrho\sigma} \xi^\varrho \eta^\sigma \zeta^{\nu-\varrho-\sigma}.$$

Deutet man diese Formel wieder symbolisch, ersetzt also in den $C_{\varrho\sigma}$ die $f_1^{n-\varrho} f_2^\varrho$ durch a_ϱ, so bedeuten die $C_{\varrho\sigma}$ Invarianten der Form $f = f_x^n = \sum \binom{n}{\varrho} a_\varrho x_1^{n-\varrho} x_2^\varrho$, und man hat eine typische Darstellung vor sich. Zwischen ξ, η, ζ besteht wie zwischen irgend drei quadratischen Formen eine Identität von der Gestalt:

$$c_{11}\xi^2 + c_{22}\eta^2 + c_{33}\zeta^2 + 2c_{23}\eta\zeta + 2c_{31}\zeta\xi + 2c_{12}\xi\eta = 0.$$

Eine andere Art der typischen Darstellung rührt von Hermite her. Sie steht in engem Zusammenhange mit der Theorie der Seminvarianten. Wir können unter den letzteren die folgenden Bildungen als Sylvestersche „Grundformen“ auszeichnen:

$$\mathfrak{G}_{2\nu} = \sum_{k=0}^{2\nu} (-1)^k \binom{2\nu}{k} a_k a_{2\nu-k},$$

$$\mathfrak{J}_{2\nu+1} = \sum_{k=0}^{2\nu} (-1)^k \binom{2\nu}{k} a_k (a_0 a_{2\nu+1-k} - a_1 a_{2\nu-k}).$$

Die $\mathfrak{G}_{2\nu}$ sind vom zweiten, die $\mathfrak{J}_{2\nu+1}$ vom dritten Grade. Führen wir noch ein den Ausdruck:

$$\mathfrak{G}_{2\nu+1} = \sum_{k=0}^{2\nu} (-1)^k \binom{2\nu}{k} a_k a_{2\nu+1-k},$$

so können wir einfach setzen:

$$\mathfrak{J}_{2\nu+1} = a_0 \mathfrak{G}_{2\nu+1} - a_1 \mathfrak{G}_{2\nu}.$$

Hermite schlägt nun (*Journ. f. Math.* **52** (1856), 18) folgenden Weg zur Transformation einer Binärform n^{ter} Ordnung f ein. Er setzt für x_1, x_2 ein:

$$x_1 X - \frac{1}{n}\frac{\partial f}{\partial x_2} Y, \quad x_2 X + \frac{1}{n}\frac{\partial f}{\partial x_1} Y$$

und entwickelt den entstehenden Ausdruck nach Potenzen von X, Y, indem er dem Resultat dieser Entwicklung die Form gibt:

$$f X^n + \binom{n}{1} f' X^{n-1} Y + \binom{n}{2} f'' X^{n-2} Y^2 + \cdots.$$

Er bezeichnet hierin $f', f'', \ldots$ als *assoziierte* Kovarianten. Dieselben sind, wie sich herausstellt, alle durch f teilbar und f' verschwindet identisch.

Man kann aber diese Darstellung so wenden, daß man erst in der Urform f die Variablen y_1, y_2 schreibt und sodann:

$$f(x) \cdot y_1 = x_1 \xi - \frac{1}{n}\frac{\partial f}{\partial x_2}\eta, \quad f(x) \cdot y_2 = x_2 \xi + \frac{1}{n}\frac{\partial f}{\partial x_1}\eta$$

setzt, woraus:

$$\xi = \frac{\partial f}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} y_2, \quad \eta = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

folgt, so daß ξ, η die Invarianteneigenschaft haben. Nun ergibt sich:

$$f(x)^{n-1} f(y) = G_0 \xi^n + \binom{n}{1} G_1 \xi^{n-1}\eta + \binom{n}{2} G_2 \xi^{n-2}\eta + \cdots + G_n \eta^n.$$

Hierbei sind die G_ϱ Kovarianten, und insbesondere wird $G_0 = 1$, $G_1 = 0$. Jede ganze rationale Funktion der G_ϱ ist eine Komitante der Urform f, wobei sich eine Potenz von $f(x)$ ausscheidet,

und umgekehrt muß jede Komitante von f sich als eine rationale Funktion der G_ϱ darstellen lassen, in deren Nenner eine Potenz von f steht. Die Formen G nennt Gordan die *Schwesterformen* von f. In symbolischer Darstellung wird, wenn wir die Formen

$$f_x^n,\ f_x'^n,\ f_x''^n, \dots$$

alle mit f zusammenfallen lassen:

$$f \cdot G_\varrho = (ff')(ff'') \dots (ff^{(k)}) f_x'^{n-1} \dots f_x^{(k)n-1} f_x^{n-k}.$$

Es werden nun die Fundamentalkovarianten $J_{2\nu}$, $J_{2\nu+1}$ aufgestellt, die durch die Gleichungen definiert sind:

$$f^{2\nu-2} J_{2\nu} = \sum_{k=0}^{2\nu} (-1)^k \binom{2\nu}{k} G_k G_{2\nu-k},$$

$$f^{2\nu-2} J_{2\nu+1} = \sum_{k=0}^{2\nu} (-1)^k \binom{2\nu}{k} G_k G_{2\nu+1-k}.$$

Durch Überschiebungen erhält man die Kovarianten J wie folgt:

$$J_{2\nu} = (f, f)^{2\nu},\ J_{2\nu+1} = (J_{2\nu}, f).$$

Insbesondere wird J_2 gleich der Hesseschen Kovariante von f. Wenn wir die oben eingeführten Seminvarianten für die transformierte Form bilden, so werden die dort mit $\mathfrak{G}_{2\nu}$ bezeichneten unmittelbar $= f^{2\nu-2} \mathfrak{J}_{2\nu}$, aber mit Rücksicht darauf, daß hier an Stelle von a_0, a_1 $G_0 = 1$, $G_1 = 0$ tritt, werden auch die Seminvarianten $\mathfrak{J}_{2\nu+1} = f^{2\nu-2} J_{2\nu+1}$. Die fundamentalen Kovarianten der Urform fallen somit bis auf den hinzutretenden Faktor $f^{2\nu-2}$ mit den fundamentalen Seminvarianten der transformierten Form zusammen.

Jede isobare Funktion der Koeffizienten einer Binärform hat die Eigenschaft, daß sie sich bei Ausführung der linearen Transformation

$$x_1 = x_1',\ x_2 = \delta x_2'$$

nur um einen konstanten Faktor, nämlich δ^w, wenn w das Gewicht bezeichnet, ändert.

Die Seminvarianten genügen der weitergehenden Forderung, daß sie bei allen linearen Transformationen

$$x_1 = x_1' + \beta x_2',\ x_2 = \delta x_2'$$

sich nur um den Faktor δ^w ändern. Diese Bildungen können

demnach sozusagen als Vorstufen der invarianten Bildungen angesehen werden.

Man kann den Invariantenbegriff so verallgemeinern, daß man an die Stelle der Gesamtheit *aller* linearen Transformationen eine *Gruppe* von solchen Transformationen setzt und die Forderung der Invarianz nur für diese Gruppe aufstellt. Man redet dann von *Invarianten der betr. Gruppe.* Besonders wichtig ist der Fall, wo die Gruppe durch die Forderung festgelegt wird, daß eine bestimmte quadratische Form für alle zu der Gruppe gehörenden Transformationen die Eigenschaft der Invarianz haben soll. Wird für diese *identische Kovariante*, welche die Gruppe festlegt, insbesondere die Quadratsumme $x_1^2 + x_2^2$ gewählt, so spricht man von *orthogonalen Transformationen*, die hier im binären Gebiet von der Form

$$x_1 = \alpha x_1' + \beta x_2', \quad x_2 = -\beta x_1' + \alpha x_2'$$

sind, und entsprechend von orthogonalen Invarianten. Z. B. besitzt eine quadratische Form $a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2$ außer ihrer Diskriminante die orthogonale Invariante $a_0 + a_2$. Man vgl. Lie-Scheffers, *Vorlesungen über kontinuierliche Gruppen,* Leipzig 1893, Kap. 23.

Der Begriff der Invarianten kann ferner in der Weise verallgemeinert werden, daß man außer *rationalen* Invarianten auch *algebraische* Invarianten in Betracht zieht, die durch eine algebraische Gleichung mit rationalen Invarianten als Koeffizienten festgelegt werden.

Durch die von Sylvester eingeführten *Reziprokanten* wird der Invariantenbegriff auf irgendwelche fortgesetzt differenzierbare Funktionen y eine Variablen x erweitert. Es handelt sich hier um solche rationale Funktionen der sukzessiven Ableitungen

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots,$$

welche sich nur um einen Faktor, nämlich eine positiv oder negativ genommene Potenz von y', ändern, wenn man die Ableitungen $y', y'' \ldots$ durch die umgekehrten:

$$x' = \frac{dx}{dy}, \quad x'' = \frac{d^2x}{dy^2}, \cdots$$

ersetzt. Die am längsten bekannte Reziprokante ist die Schwarzsche Form:

$$2y'y''' - 3y''^2 = -y'^6(2x'x''' - 3x''^2).$$

Ebenso wird z. B.

$$3y''y^{IV} - 5y'''^2 = y'^8(3x''x^{IV} - 5x'''^2).$$

Diese Reziprokanten sind homogene ganze Funktionen der Ableitungen. Von solchen Reziprokanten gilt, daß sie isobar sind, wenn man als das Gewicht der Derivierten $y^{(m)}$ die Zahl $m - 2$ ansieht. So wird in den vorstehenden Beispielen, bei denen der *Grad* $k = 2$ ist, das Gewicht w das erste Mal $= 0$, das zweite Mal $= 2$. Der Exponent μ der Potenz y'^{μ}, mit der sich die Reziprokante multipliziert, wird allgemein

$$\mu = 3k + w.$$

Aus der relativen Reziprokante wird eine *absolute Reziprokante* R abgeleitet, indem man sie durch $y'^{\frac{1}{2}\mu}$ dividiert. Dann ist $\frac{dR}{dx}$ wieder eine Reziprokante. Die Reziprokanten ändern sich nicht, wenn:

$$x = x_1 + a, \quad y = y_1 + b$$

gesetzt wird (*Translations-Reziprokanten*). Eine Reziprokante, die y' nicht enthält, heißt eine *reine* Reziprokante. Sie bleibt invariant für die Transformationen:

$$x = ax_1 + by_1 + c, \quad y = dx_1 + ey_1 + f$$

(*Affinitäts-Reziprokante*). In diesem Sinne sind die Reziprokanten in der Tat den Invarianten analog.

Vgl. die von Hammond bearbeiteten Vorlesungen Sylvesters *Am. Journ. of Math.* **8** (1886), 196 und ebenda **9** (1887), 1, 113, 297, **10** (1887), 1, ferner Cayley, *Quarterly Journ.* **26** (1893), 169, 289, *Papers* **13**, 366.

§ 5. Formenmoduln.

Die Binärformen finden ihre einfachste geometrische Interpretation durch Punktsysteme auf rationalen Kurven. Von diesem Standpunkte aus liegt es nahe, als natürliche Erweiterung der Binärformen die algebraischen Gebilde anzusehen, deren geometrisches Äquivalent Punktsysteme auf einer beliebigen algebraischen Kurve sind. Nachdem die Theorie der Punktsysteme erst auf transzendentem Wege (Clebsch und Gordan, *Theorie der Abelschen Funktionen*, 1866) in Angriff genommen und darauf die

algebraische Theorie durch Brill und Noether (vgl. deren Bericht über die Entwicklung dieser Theorie, *Math. Ver.* **3**, 1894) begründet worden, haben Kronecker einerseits (*Journ. f. Math.* **92** (1882), 1, *Werke* **2** (1897), 237) und Dedekind-Weber andererseits (*Journ. f. Math.* **92** (1882), 181) eine strenge arithmetische Theorie dieser Gebilde gegeben.

Der allgemeine Begriff, auf dem die letzteren Theorien fußen, ist bei Kronecker das Modulsytem, bei Dedekind-Weber der Modul, und diese beiden Begriffe stehen in engster Beziehung zueinander. In die eigentliche Formentheorie hat Hilbert (*Math. Ann.* **36** (1890), 473) die Moduln eingeführt, die wir zur unzweideutigen Charakterisierung hier *Formenmoduln* nennen wollen.

Ein Formenmodul ist ein System algebraischer Formen (d. h. homogener ganzer Funktionen von n Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$), welches die Eigenschaft hat, daß Summe, Differenz und Produkt zweier Formen des Systems immer wieder dem System angehören, aber auch das Produkt einer Form des Systems mit irgendeiner Form, die nicht zum System gehört, wieder eine Form des Systems bildet.

Der erste grundlegende Satz ist dann folgender: Aus jedem Formenmodul läßt sich eine endliche Anzahl m von Formen $F_1, F_2, \ldots, F_m$ auswählen, so daß jede Form von der Gestalt

$$F = A_1 F_1 + A_2 F_2 + \cdots + A_m F_m$$

(wo $A_1, A_2, \ldots, A_m$ beliebige Formen bedeuten, die ein homogenes F liefern), aber auch keine andere Form dem Modul angehört. Nach H. Weber (*Algebra* II, § 41) heißt der Inbegriff dieser m Formen $(F_1, F_2, \ldots, F_m)$ eine *Basis* des Formenmoduls.

Der Ausdruck Modul rührt bei Kronecker daher, daß er zwei Formen Φ, Φ' kongruent nach einem Modul nennt, in Zeichen

$$\Phi \equiv \Phi', \text{ Mod } (F_1, \ldots, F_m),$$

wenn Φ von der Form

$$\Phi = \Phi' + A_1 F_1 + \cdots + A_m F_m$$

ist.

Wird $F_1 = 0$, $F_2 = 0, \ldots, F_m = 0$, so wird auch $F = 0$. Aber es gehören nicht umgekehrt alle Formen, die mit der Basis $(F_1, F_2, \ldots, F_m)$ zugleich verschwinden, zu dem Formenmodul. Diese Formen bilden vielmehr einen neuen Modul, welcher der *Nullmodul* des ersten heißen kann. Es zeigt sich

jedoch, daß die Verschiedenheit eines Formenmoduls und seines Nullmoduls insofern eine beschränkte ist, als die Ordnung der Formen, die dem letzteren, aber nicht dem ersteren angehören, unter einer endlichen Grenze liegt. Die Basis des Nullmoduls besteht aus Formen niedrigster Zahl und Ordnung, deren Verschwinden das Verschwinden von $F_1, \ldots, F_m$ ersetzen kann.

Durch die Gleichungen $F_1 = 0, \ldots, F_m = 0$ werden gewisse μ Veränderliche $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ als algebraische Funktionen der $n - \mu$ übrigen, $x_{\mu+1}, \ldots, x_n$, festgelegt. Die Zahl μ heißt die *Stufe* des Formenmoduls. Ist die Stufenzahl $n - 1$, so gestatten die Gleichungen $F_i = 0$ nur eine endliche Zahl gemeinsamer Lösungen. Ist die Stufe n, so besteht der zugehörige Nullmodul aus sämtlichen homogenen Funktionen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und für seine Basis können wir $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ wählen. Wir können ihn als den Fundamentalmodul bezeichnen.

Ist $F_1 = F_1'$ die Form höchster Ordnung o unter den Formen der Modulbasis, so lassen sich $r - 1$ Formen $F_2', F_3' \ldots F_r'$ gleicher Ordnung o bestimmen, derart, daß jede Form des Moduls in der Gestalt:

$$F = B_1 F_1' + B_2 F_2' + \cdots + B_r F_r'$$

darstellbar ist, wobei nunmehr auch $B_1, \ldots, B_r$ Formen von gleicher Ordnung bedeuten. Von den Formen

$$F' = \lambda_1 F_1' + \lambda_2 F_2' + \cdots + \lambda_r F_r'$$

(in welchem Ausdrucke $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ irgendwelche Konstanten bedeuten) sagt man, sie bilden eine *Schar*. Jeder Formenmodul ist so mit einer Formenschar verknüpft, und diese Verknüpfung ist eine eindeutige, denn die Formenschar besteht aus allen Formen o^{ter} Ordnung, welche der Formenmodul enthält.

Ein einfaches Beispiel für einen Formenmodul bildet der durch die folgenden drei Formen gegebene:

$$F_1 = x_2 x_4 - x_3^2, \quad F_2 = x_2 x_3 - x_1 x_4, \quad F_3 = x_1 x_3 - x_2^2.$$

Diese drei Formen verschwinden, wenn

$$x_1 = \xi^3, \quad x_2 = \xi^2 \eta, \quad x_3 = \xi \eta^2, \quad x_4 = \eta^3$$

gemacht wird, was auch die Werte von ξ, η seien. Die sämtlichen Formen

$$F' = \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \lambda_3 F_3$$

bilden die zu dem Formenmodul gehörige Formenschar.

Im allgemeinen bestehen zwischen den Formen einer Modulbasis gewisse identische Beziehungen:

$$X_1^{(\varrho)} F_1 + X_2^{(\varrho)} F_2 + \cdots + X_m^{(\varrho)} F_m \equiv 0 \qquad (\varrho = 1, 2 \ldots q).$$

Die Koeffizienten A_i in der Darstellung einer beliebigen Form F des Moduls sind dann keineswegs vollkommen bestimmt, vielmehr lassen sie sich durch andere

$$A_i + \sum_{\varrho} \Gamma^{(\varrho)} X_i^{(\varrho)}$$

ersetzen, wo die $\Gamma^{(\varrho)}$ Formen bedeuten, die bis auf ihre Ordnung willkürlich bleiben, und die Summation über die Indizes ϱ zu erstrecken ist, für welche die Ordnung von $X_i^{(\varrho)} F_i$ die Ordnung von F nicht übersteigt.

In dem angeführten Beispiel sind die drei Formen F_1, F_2, F_3 durch die Beziehungen verknüpft:

$$x_1 F_1 + x_2 F_2 + x_3 F_3 = 0,$$
$$x_2 F_1 + x_3 F_2 + x_4 F_3 = 0,$$

und sonach wird identisch:

$$A_1 F_1 + A_2 F_2 + A_3 F_3 = A_1' F_1 + A_2' F_2 + A_3' F_3,$$

wenn

$$A_1' = A_1 + x_1 \Gamma' + x_2 \Gamma'',$$
$$A_2' = A_2 + x_2 \Gamma' + x_3 \Gamma'',$$
$$A_3' = A_3 + x_3 \Gamma' + x_4 \Gamma'',$$

und Γ', Γ'' willkürliche Formen bezeichnen, deren Ordnung um 1 niedriger ist als die der A.

Aus den Gleichungen

$$X_1^{(\varrho)} F_1 + \cdots + X_m^{(\varrho)} F_m = 0$$

folgt, daß

$$X_1 F_1 + \cdots + X_m F_m = 0$$

wird, wenn man

$$X_i = \sum_{\varrho} Y^{(\varrho)} X_i^{(\varrho)} \qquad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

setzt. Bei dieser Darstellung der X_i sind aufs neue die $Y^{(\varrho)}$ im allgemeinen nicht vollständig bestimmt, vielmehr erhält man, wenn eine Lösung dieses Gleichungssystems für $Y^{(\varrho)}$ gefunden

ist, die allgemeinste Lösung, indem man die allgemeine Lösung des Gleichungssystems

$$\sum_{\varrho} Y^{(\varrho)} X_i^{(\varrho)} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

hinzunimmt.

Alle Lösungen dieses Systems lassen sich durch gewisse s unter ihnen $Y_1^{(\varrho)}, Y_2^{(\varrho)}, \ldots, Y_s^{(\varrho)}$ linear ausdrücken, so daß man als Lösung

$$Y^{(\varrho)} = \sum_{\sigma} Z_{\sigma}^{(\varrho)} Y_{\sigma}^{(\varrho)} \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, s)$$

erhält. Aus diesen Gleichungen ergibt sich weiter ein Gleichungssystem:

$$\sum_{\sigma} Z_{\sigma}^{(\varrho)} Y_{\sigma}^{(\varrho)} = 0 \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, q)$$

usw. Die Kette dieser abgeleiteten Gleichungssysteme bricht aber, wie Hilbert gezeigt hat, nach höchstens m Schritten ab, indem spätestens das m^{te} Gleichungssystem keine Lösung mehr zuläßt.

Ist z. B. die Basis des Moduls (x_1, x_2, x_3, x_4), so lautet die erste Gleichung:

$$x_1 X_1 + x_2 X_2 + x_3 X_3 + x_4 X_4 = 0$$

und liefert sechs unabhängige Lösungen. Von diesen ist z. B. die erste $(X_1^{(1)}, X_2^{(1)}, X_3^{(1)}, X_4^{(1)}) = (x_2, -x_1, 0, 0)$. Damit erhält man für die $Y^{(\varrho)}$ das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
x_2 Y^{(1)} + x_3 Y^{(2)} + x_4 Y^{(3)} &= 0, \\
-x_1 Y^{(1)} + x_3 Y^{(4)} + x_4 Y^{(5)} &= 0, \\
-x_1 Y^{(2)} - x_2 Y^{(4)} + x_4 Y^{(6)} &= 0, \\
-x_1 Y^{(3)} - x_2 Y^{(5)} - x_3 Y^{(6)} &= 0.
\end{aligned}$$

Das zweite Gleichungssystem wird dann

$$\begin{aligned}
x_2 Z_1 - x_1 Z_2 &= 0, \quad & x_4 Z_3 - x_3 Z_4 &= 0, \\
x_3 Z_1 - x_1 Z_3 &= 0, \quad & x_2 Z_4 - x_4 Z_2 &= 0, \\
x_4 Z_1 - x_1 Z_4 &= 0, \quad & x_3 Z_2 - x_2 Z_3 &= 0,
\end{aligned}$$

und seine allgemeine Lösung ist

$$Z_1 = x_1 U, \; Z_2 = x_2 U, \; Z_3 = x_3 U, \; Z_4 = x_4 U,$$

so daß das vierte Gleichungssystem

$$x_1 U = 0,\ x_2 U = 0,\ x_3 U = 0,\ x_4 U = 0$$

keine Lösung $V \neq 0$ zuläßt Die geometrische Deutung dieses Beispiels wird sehr einfach, wenn x_1, x_2, x_3, x_4 als homogene Koordinaten eines Punktes P im Raume interpretiert werden. X_1, X_2, X_3, X_4 sind dann die Koordinaten einer Ebene, die P enthält, $Y^{(1)}, Y^{(2)}, \ldots$ die Koordinaten einer geraden Linie, die durch P hindurchgeht und $Z_1, Z_2, \ldots$ die Koordinaten eines Punktes, der mit P zusammenfällt.

Ein Modul $\mathfrak{M}$ heißt durch einen Modul $\mathfrak{N}$ teilbar und dieser ein Teiler jenes, wenn jede Form, die zu $\mathfrak{M}$ gehört, auch in $\mathfrak{N}$ enthalten ist. Z. B. ist $(F_1, F_2, \ldots, F_m)$ die Basis eines Teilers des durch $(F_1, \ldots, F_r)$ bestimmten Moduls, wenn $r < m$ ist.

Der größte gemeinschaftliche Teiler zweier Moduln $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$ ist der Modul, der durch Addition der sämtlichen Formen von $\mathfrak{M}$ zu sämtlichen Formen von $\mathfrak{M}'$ entsteht. Dieser besteht, wenn $(F_1, F_2, \ldots, F_m)$ die Basis von $\mathfrak{M}$, $(F_1', \ldots, F_{m'}')$ die Basis von $\mathfrak{M}'$ ist, aus allen Formen, die in der Gestalt

$$F = A_1 F_1 + \cdots + A_m F_m + A_1' F_1' + \cdots + A_{m'}' F_{m'}'$$

darstellbar sind.

Das kleinste enthaltende Vielfache zweier Moduln $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ besteht aus allen Formen, die gleichzeitig in $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ enthalten sind.

Die Zahl der Bedingungen, die eine Form F von genügend hoher Ordnung R erfüllen muß, damit sie zu einem Modul $\mathfrak{M}$ gehört, bezeichnet Hilbert, indem er sie als Funktion von R betrachtet, mit $\chi(R)$ und nennt sie die *charakteristische Funktion* des Moduls. $\chi(R)$ ist eine ganze rationale Funktion von R mit ganzzahligen Koeffizienten und von einer Ordnung d, die kleiner als die Zahl der in den Formen auftretenden Variablen ist. Diese Funktion wird, durch Binomialkoeffizienten $\binom{R}{i}$ ausgedrückt, in folgender Weise geschrieben:

$$\chi(R) = \chi_0 + \chi_1 \binom{R}{1} + \chi_2 \binom{R}{2} + \cdots + \chi_d \binom{R}{d}.$$

$\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_d$ sind hierbei gewisse dem Modul eigentümliche ganze Zahlen und d ist die *Dimension* des Moduls. Für das erste von uns gewählte Beispiel wird

$$\chi(R) = 1 + 3R,$$

und für den Modul (x_1, x_2, x_3, x_4) ist $\chi(R) = 0$. In der Tat gehört *jede* Form von x_1, x_2, x_3, x_4 zu diesem Modul.

Der für uns wichtigste Satz über Formenmoduln wird gewonnen, wenn man den allgemeinen Begriff eines *Formensystems* einführt. Hierunter wird eine Gesamtheit von Formen einer bestimmten Anzahl $x_1, x_2, \ldots, x_n$ von Variablen verstanden, von der nur vorausgesetzt zu werden braucht, daß man von jeder einzelnen Form entscheiden kann, ob sie zu dem System gehört oder nicht. Dann lautet der allgemeine *Hilbertsche Satz:*

Jedes Formensystem gehört zu einem Formenmodul, d. h. es lassen sich aus dem System m Formen $F_1, \ldots, F_m$ auswählen, so daß jede weitere Form in der Gestalt:

$$F = A_1 F_1 + \cdots + A_m F_m$$

darstellbar ist.

Der Beweis geschieht durch vollständige Induktion, d. h. durch den Schluß von $n - 1$ auf n Variable. Um diesen Schluß möglich zu machen, wird zunächst die allgemeine Form F des Systems durch eine bestimmte Form F_1 desselben von der Ordnung r dividiert. Damit diese Division die Wirkung hat, daß sie die Ordnung von F für eine der Variablen unter die Ordnung r von F_1 herunterdrückt, wird zuerst die Substitution ausgeführt:

$$x_1 = x_1' + \lambda_1 y, \ldots, x_{n-1} = x_{n-1}' + \lambda_{n-1} y, \; x_n = y,$$

und die $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ werden so gewählt, daß das Glied mit y^r in F_1 nicht verschwindet. Dann wird die Division ausgeführt, indem man F und F_1 als Funktionen von y ansieht, und man erhält ein Resultat:

$$F = a_1 F_1 + \Phi_1,$$

wo in Φ_1 y höchstens zur $r - 1^{\text{ten}}$ Potenz vorkommt. Für eine solche Form läßt sich durch den Schluß von $r - 2$ auf $r - 1$ das Theorem erweisen, indem man $\Phi_1 = y^{r-1}\varphi + \psi$ macht, wo φ y gar nicht mehr und ψ es höchstens zur $(r - 2)^{\text{ten}}$ Ordnung enthält, und voraussetzt, das Theorem sei für $n - 1$ Variable allgemein bewiesen (vgl. Webers *Algebra* II, § 41).

Gordan hat den Hilbertschen Satz bewiesen, indem er von den einzelnen Gliedern der Formen ausgeht (*Gött. Nachr.* (1899) 240, *Journ. de math.* (5) **6** (1900), 141).

Die Hauptanwendung, die Hilbert von seinem Satze gemacht hat, besteht in dem Nachweis der Endlichkeit des In-

variantensystems, d. h. des Satzes, daß sich alle Invarianten gegebener Formen durch gewisse unter ihnen ganz und rational ausdrücken lassen. Der große Vorzug dieses Beweises gegenüber den ursprünglichen Endlichkeitsbeweisen (Gordan, *Journ. f. Math.* **69** (1868), 343, *Math. Ann.* **2** (1870), 227, **5** (1872), 595) beruht außer der größeren Einfachheit darauf, daß er sich mühelos auf Formensysteme von beliebig vielen Veränderlichen übertragen läßt. Wir beschränken uns nur der Kürze wegen auf eine Binärform f mit den Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$.

Zunächst läßt sich nach dem Hilbertschen Theorem, da die Invarianten offenbar ein Formensystem der Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$ bilden, jede Invariante J mit Hülfe gewisser Invarianten $J_1, J_2, \ldots, J_\mu$ in der Form ausdrücken:

$$(\alpha) \qquad J = A_1 J_1 + A_2 J_2 + \cdots + A_\mu J_\mu.$$

Durch eine lineare Substitution $x_1 = \xi_1 y_1 + \eta_1 y_2$, $x_2 = \xi_2 y_1 + \eta_2 y_2$ gehe $a_0, \ldots, a_n$ über in $a_0', \ldots, a_n'$, und die den A_i entsprechenden Formen der $a_0', \ldots, a_n'$ seien A_i'. Dann besteht eine Gleichung von folgender Form:

$$\Delta^\gamma \cdot J = A_1' \Delta^{\gamma_1} \cdot J_1 + \cdots + A_\mu' \Delta^{\gamma_\mu} \cdot J_\mu,$$

wenn $\Delta = \xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1$ den Modul der Substitution bedeutet. Nach einem von Clebsch und Gordan herrührenden und von Mertens (*Wien. Ber.* **95** (1887), 942) zuerst allgemein angewandten Verfahren unterwerfe man nun die letzte Gleichung γ-mal dem Prozeß

$$\Omega = \frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \eta_2} - \frac{\partial^2}{\partial \xi_2 \partial \eta_1};$$

dann gehen die Potenzen von Δ in einfache Zahlfaktoren und die Koeffizienten A_i' in Invarianten über, so daß jetzt:

$$(\beta) \qquad J = J_1' J_1 + \cdots + J_\mu' J_\mu$$

wird und nun die Koeffizienten J_i' nicht bloß homogene Funktionen von $a_0, \ldots, a_n$, sondern Invarianten von f bedeuten. Wendet man auf diese dasselbe Verfahren an wie auf J und fährt so weiter fort, so gelangt man nach einer endlichen Anzahl von Schritten zu einer Darstellung von J als ganze rationale Funktion einer endlichen Zahl bestimmter Invarianten $J_1, \ldots J_\mu, \ldots J_\nu$, womit die Endlichkeit des Systems bewiesen ist.

Der Beweis läßt sich leicht auch auf das simultane System mehrerer Binärformen und die Kovarianten ausdehnen. Daß hier-

aus dann die Endlichkeit des Komitantensystems auch für Simultanformen folgt, hat Peano (*Torino Atti* **17** (1882) 73) gezeigt.

Der Hilbertsche Satz gestattet aber auch, den Beweis mit geringen Veränderungen auf Formen von beliebig vielen Variabeln auszudehnen. Er gibt ferner die Möglichkeit, die Endlichkeit des Systems der *Syzygien* oder identischen Relationen zwischen den Komitanten nachzuweisen.

L. Maurer (*Münch. Ber.* 1899, p. 147, *Math. Ann.* **57** (1903) 265) hat den Satz über die Endlichkeit des Invariantensystems in folgender allgemeinen Form bewiesen: alle ganzen rationalen Funktionen der Variabeln $x_1, \ldots, x_n$, die durch eine kontinuierliche Gruppe G in sich transformiert werden, lassen sich als ganze rationale Funktionen von einer begrenzten Anzahl unter ihnen darstellen. Dabei können noch $x_1, \ldots, x_n$ einem System algebraischer Gleichungen $\mathfrak{F}_1 = 0$, $\mathfrak{F}_2 = 0, \ldots$ unterworfen werden, das gegenüber der Gruppe G invariant ist.

Die interessante Frage nach solchen Invarianten, von denen alle anderen rationale Funktionen mit ganzen Koeffizienten sind, ist nur in einem kleinen Aufsatze von H. Weber, *Gött. Nachr.* 1893, p. 109 berührt worden.

Von großer Wichtigkeit ist es, nicht bloß auf den rationalen Zusammenhang, sondern auch auf die algebraische Abhängigkeit der Invarianten einzugehen. Eine solche Abhängigkeit besteht immer zwischen $N - \nu + 2$ Formen, wenn N die Gesamtzahl der in den Grundformen vorhandenen Konstanten, ν die Konstantenzahl der Substitutionsgleichungen, nämlich bei m Veränderlichen m^2, bedeutet.

So ergibt sich bei einer Binärform zwischen $n - 1$ Invarianten $(J, J_1, \ldots, J_{n-2})$ eine algebraische Gleichung $f(J, J_1, \ldots, J_{n-2}) = 0$. Hilbert hat nun nachgewiesen, daß diese Gleichung immer auf eine besondere Form gebracht werden kann. Zunächst nämlich kann man sich durch Erheben in geeignete Potenzen $J, \ldots, J_{n-2}$ auf denselben Grad gebracht denken. Dann kann man weiter lineare Funktionen von $J, J_1, \ldots, J_{n-2}$, etwa

$$J_1' = J_1 - \lambda_1 J, \ \ldots, \ J_{n-2}' = J_{n-2} - \lambda_{n-2} J,$$

an die Stelle von $J_1, \ldots, J_{n-2}$ selbst bringen und diese so bestimmen, daß in der Gleichung der Koeffizient des ersten Gliedes gleich 1 wird. Dies ist der Fall, wenn

$$f(1, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-2}) = 1$$

wird. So ergibt sich eine Gleichung von der Form:

$$(\gamma) \qquad J^k + \mathfrak{J}_1 J^{k-1} + \cdots + \mathfrak{J}_k = 0,$$

in der $\mathfrak{J}_1, \ldots, \mathfrak{J}_k$ ganze rationale Funktionen von $J_1', \ldots, J_{n-2}'$ sind. Hierbei läßt sich, wie Hilbert gezeigt hat, J so wählen, daß jede weitere Invariante J' eine rationale Funktion von $J, J_1', \ldots, J_{n-2}'$ wird.

Die Gesamtheit aller rationalen Funktionen von $J, J_1', \ldots, J_{n-2}'$ bildet aber einen *algebraischen Funktionenkörper*, und da hier allgemein die Homogenitätsbedingung hinzutritt, können wir von einem *algebraischen Formenkörper* reden. Alle Formen, ganze und gebrochene, dieses Körpers sind andererseits Invarianten, wenn man sich entschließt, zu den ganzen Invarianten gebrochene hinzuzunehmen, d. h. Brüche, deren Zähler und Nenner von gewöhnlichen (ganzen) Invarianten gebildet wird. Dieser Formenkörper heißt der Invariantenkörper; zu ihm gehören auch alle Konstanten, d. h. von den Koeffizienten der Grundformen unabhängigen Zahlen. Wir können aus ihm k Invarianten $\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, \ldots, \mathfrak{J}_k$, wie z. B. $J^{k-1}, J^{k-2}, \ldots, J, 1$, auswählen, so daß jede Invariante $\mathfrak{J}$ sich in der Form darstellen läßt:

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{A}_1 \mathfrak{J}_1 + \mathfrak{A}_2 \mathfrak{J}_2 + \cdots + \mathfrak{A}_k \mathfrak{J}_k,$$

wobei $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_k$ rationale Funktionen von $J_1', \ldots, J_{n-2}'$ sind. Die Invarianten $\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, \ldots, \mathfrak{J}_k$ bilden dann eine *Basis* des Invariantenkörpers.

Die Grundgleichung (γ) zeigt, daß wenn die Grundinvarianten $J_1', \ldots, J_{n-2}'$ verschwinden, auch J und damit jede ganze Invariante verschwindet. Es gilt aber auch der umgekehrte Satz, daß, wenn das Verschwinden von $n-2$ Invarianten $J_1', \ldots, J_{n-2}'$ das Verschwinden aller ganzen Invarianten zur Folge hat, jede solche Invariante J von genügend hohem Grade eine ganze algebraische Funktion von $J_1', \ldots, J_{n-2}'$ wird, d. h. einer Gleichung von der Form (γ) genügt. Von einem gewissen Grade an ist nämlich jede Form von der Gestalt (α) auch in der Gestalt

$$J = \mathfrak{A}_1 J_1' + \cdots + \mathfrak{A}_{n-2} J_{n-2}'$$

darstellbar, weil mit $J_1', \ldots, J_{n-2}'$ auch $J_1, \ldots, J_\mu$ verschwinden und deswegen die durch die Basen $(J_1', \ldots, J_{n-2}')$ und $(J_1, \ldots, J_\mu)$ festgelegten Moduln nur in den Formen, deren Grad unter einer gewissen Grenze S liegt, verschieden sein können. Die vorstehende Gestalt läßt sich aber wieder auf die folgende reduzieren:

$$J = \mathfrak{J}_1' J_1' + \cdots + \mathfrak{J}_{n-2}' J_{n-2}',$$

wo $\mathfrak{J}_1', \ldots, \mathfrak{J}_{n-2}'$ Invarianten bedeuten. Diese können, wenn ihr Grad über der Grenze S liegt, weiter mit Hilfe der Invarianten $J_1', \ldots, J_{n-2}'$ reduziert, d. h. auf eine Form wie die vorstehende gebracht werden, so daß man schließlich zu einer Darstellung von J gelangt, die wie folgt aussieht:

$$J = R_1 j_1 + R_2 j_2 + \cdots + R_w j_w,$$

indem $R_1, R_2, \ldots$ ganze Funktionen von $J_1', \ldots, J_{n-2}'$ und $j_1, \ldots, j_w$ Invarianten sind, deren Grad $< S$ ist, und wir können, indem wir nötigenfalls einzelne der $R = 0$ setzen, annehmen, es umfassen $j_1, \ldots, j_w$ ein volles System linear unabhängiger Invarianten aller Grade $< S$. Wenden wir dann dieselbe Darstellungsform auch auf $Jj_1, Jj_2, \ldots, Jj_w$ an, so ergeben sich w Gleichungen von der Form:

$$\begin{aligned}
Jj_1 &= R_{11} j_1 + R_{12} j_2 + \cdots + R_{1w} j_w, \\
Jj_2 &= R_{21} j_1 + R_{22} j_2 + \cdots + R_{2w} j_w, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
Jj_w &= R_{w1} j_1 + R_{w2} j_2 + \cdots + R_{ww} j_w,
\end{aligned}$$

und durch Elimination der j aus diesen Gleichungen folgt:

$$\begin{vmatrix} R_{11} - J & R_{12} & \ldots R_{1w} \\ R_{21} & R_{22} - J & \ldots R_{2w} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ R_{w1} & R_{w2} & \ldots R_{ww} - J \end{vmatrix} = 0,$$

d. h. eine Gleichung von der Form (γ) für J.

§ 6. Invariante Bildungen der Formen mit mehr als zwei Veränderlichen.

Im binären Gebiet kommen als Komitanten nur zwei Arten, Invarianten und Kovarianten, in Betracht. Bei Formen mit mehr als zwei Veränderlichen hat man aber noch andere Bildungen ins Auge zu fassen. Werden nämlich in der Matrix

$$\begin{Vmatrix} x_1' & x_2' & \ldots & x_r' \\ x_1'' & x_2'' & \ldots & x_r'' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{(m)} & x_2^{(m)} & \ldots & x_r^{(m)} \end{Vmatrix}$$

die einzelnen Zeilen einer homogenen linearen Substitution unterworfen, so transformieren sich auch die Determinanten der Matrix linear. Wird die Zahl m der Zeilen in dieser Matrix insbesondere $= r - 1$, so besteht dieselbe aus r Determinanten, die wir bezeichnen mit

$$u_1, u_2, \ldots, u_r,$$

und die lineare Transformation dieser Determinanten ist von der Art, daß der Ausdruck

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + \cdots + u_r x_r$$

den Charakter einer Kovariante hat, indem er sich mit dem Substitutionsmodul multipliziert, wie man sofort sieht, wenn man die Matrix durch eine Zeile

$$x_1 \; x_2 \; \ldots \; x_r$$

zu einer Determinante ergänzt und bedenkt, daß diese Determinante in der Tat bei einer linearen Substitution sich mit dem Substitutionsmodul multipliziert. Die lineare Transformation, welche die Größen $u_1, \ldots, u_r$ erfahren, nennt man die *reziproke* zu der Transformation der Variablen $x_1, \ldots, x_r$ und bezeichnet die Variablensysteme $u_1, \ldots, u_r$ und $x_1, \ldots, x_r$ als *kontragredient*, während man Variablensysteme, die derselben Transformation unterliegen, als *kogredient* und solche, die unabhängigen linearen Transformationen unterworfen werden, als *digredient* charakterisiert. Zu beachten ist, daß die Determinanten einer Matrix mit $r - 1$ Reihen von je r kontragredienten Variablen wieder kogrediente Größen sind und daß die Differentiationssymbole

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \cdots \frac{\partial}{\partial x_r}$$

sich formal wie kontragrediente Variable verhalten, was sofort zu erkennen ist, wenn man die Differentiation an der linearen Form $u_1 x_1 + \cdots + u_r x_r$ ausführt, wo sie unmittelbar die kontragredienten Größen $u_1, \ldots, u_r$ liefert.

Die Dimensionen, zu denen eine Form die kontragredienten Variablen enthält, wollen wir der größeren Deutlichkeit wegen als *Klasse*, nicht als Ordnung bezeichnen.

Wenn man nun die allgemeinsten invarianten Systeme sucht, so hat man eine beliebige Anzahl Grundformen mit beliebig vielen Reihen von r Veränderlichen vorauszusetzen. Diese Ver-

änderlichen kann man von vornherein als kogredient voraussetzen, indem man etwa vorkommende kontragrediente Variablenreihen sofort durch die Determinante einer $(r-1)$-reihigen Matrix ersetzt. Nun hat Capelli, ein Theorem von Clebsch (*Gött. Abh.* 1872, Math. Klasse, p. 3) modifizierend, gezeigt, daß sich der allgemeine Fall auf den reduzieren läßt, wo nur $r-1$ Reihen kogredienter Variablen vorhanden sind (*Acc. dei Lincei, Rendic.* (4) 7 (1891), 161).

Neben den Kovarianten hat man aber auch solche Bildungen zu betrachten, deren Variable den reziproken Transformationen unterworfen werden, also zu denen der Grundformen kontragredient sind. Diese Bildungen heißen *Kontravarianten* (Sylvester) oder zugehörige Formen (Aronhold). Bildungen, die beide Arten von Variablenreihen gleichzeitig enthalten, heißen *Divarianten* (Salmon) oder Zwischenformen (Aronhold).

Der Ausdruck $u_1x_1 + \cdots + u_rx_r$ heißt die *identische Kovariante,* und es gilt der Satz: Wenn eine Divariante nicht die Koeffizienten der Grundform, sondern nur eine Reihe kogredienter und eine Reihe kontragredienter Variablen enthält, ist sie notwendigerweise eine Potenz der identischen Kovariante.

Die wichtigsten invarianten Prozesse lassen sich aus den bei den Binärformen besprochenen sofort herleiten. Es ist zunächst der *Aronholdsche Prozeß.* Wir schreiben zwei Formen n^{ter} Ordnung f, g von r Variablen in der Gestalt:

$$f = \sum \binom{n}{\lambda\,\mu\ldots} a_{\lambda\mu\ldots}\, x_1^\lambda x_2^\mu \ldots, \qquad g = \sum \binom{n}{\lambda\,\mu\ldots} b_{\lambda\mu\ldots}\, x_1^\lambda x_2^\mu \ldots$$

und bezeichnen mit Q irgendeine Komitante, dann ist der Aronholdsche Prozeß durch die Gleichung definiert:

$$\delta Q = \sum_{\lambda\mu\ldots} b_{\lambda\mu\ldots} \frac{\partial Q}{\partial a_{\lambda\mu\ldots}}.$$

Die *Polarenbildung* oder der *Plueckersche Prozeß* wird durch die Gleichung

$$\Delta_y f = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial f}{\partial x_i} y_i$$

definiert, und der *Cayleyschen Prozeß,* ausgeführt an einer Form F, die r Variablenreihen $x_1' \ldots x_r'$, $x_1'' \ldots x_r''$, $\ldots$, $x_1^{(r)} \ldots x_r^{(r)}$ zu den Ordnungen n', n'', $\ldots$, $n^{(r)}$ enthält, wird:

$$\Omega F = \frac{1}{n' n'' \ldots n^{(r)}} \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1'} & \frac{\partial F}{\partial x_2'} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial x_r'} \\ \frac{\partial F}{\partial x_1''} & \frac{\partial F}{\partial x_2''} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial x_r''} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F}{\partial x_1^{(r)}} & \frac{\partial F}{\partial x_2^{(r)}} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial x_r^{(r)}} \end{vmatrix}.$$

Über die invarianten Prozesse vgl. man die Arbeiten von Capelli, *Fondamenti di una teoria generale delle forme algebriche, Acc. dei Lincei Mem.* (3) **12** (1882) 529, *Math. Ann.* **29** (1881) 331, **37** (1890) 1, *Napoli Rendic.* (2) **7** (1893) 29, 155, *Giorn. di Mat.* **32** (1894) 376.

Unter den speziellen invarianten Bildungen für Formen mit beliebig vielen Veränderlichen ist zunächst die *Jacobische* oder *Funktionaldeterminante* zu nennen (vgl. S. 156). Sie setzt r Formen $f_1, f_2, \ldots, f_r$ mit r Veränderlichen voraus, die für diese der Reihe nach von den Ordnungen $n_1, n_2, \ldots, n_r$ sind, und wird durch den Ausdruck gegeben:

$$\Delta = \frac{1}{n_1 n_2 \ldots n_r} \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_r} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_1} & \frac{\partial f_r}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_r}{\partial x_r} \end{vmatrix}$$

(Jacobi, *Journ. f. Math.* **22** (1841) 319, *Werke* **3**, 393, *Ostwalds Klassiker* Nr. 78). Bildet man von je r aus $r+1$ Formen die Funktionaldeterminante, und von je r unter den letzteren wieder die Funktionaldeterminanten, so sind diese den Urformen proportional. Vgl. Clebsch, *Journ. f. Math.* **69** (1868) 355, **70** (1869) 175, Rosanes, ebenda **75** (1873) 166, Pasch, ebenda **80** (1875) 177. Die Bedeutung der Funktionaldeterminante besteht darin, daß sie verschwindet, sowie zwischen den r Formen, auf die sie sich bezieht, eine identische Relation

$$\Phi(f_1, f_2, \ldots, f_r) \equiv 0$$

besteht.

Sucht man die Bedingung dafür, daß die r Gleichungen:

$$f_1 = 0, f_2 = 0, \ldots, f_r = 0$$

zusammen bestehen können, so hat man aus diesen Gleichungen die r Variablen zu eliminieren und erhält dann eine Gleichung $R = 0$ zwischen den Koeffizienten der r Formen. Die linke Seite dieser Gleichung ist die *Resultante* der r Formen. Einen expliziten Ausdruck für die Resultante dreier ternären Formen hat Gordan gegeben, *Math. Ann.* **50** (1897) 113.

Die *Hessesche Determinante* einer Form f n^{ter} Ordnung von $x_1, \ldots, x_r$ (vgl. S. 160) ist durch den Ausdruck gegeben:

$$H = \operatorname{Det} \left| \frac{1}{n(n-1)} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right| \qquad (i, j = 1, 2 \ldots).$$

Für eine quadratische Form

$$f = \sum_i \sum_j a_{ij} x_i x_j$$

reduziert sie sich auf deren Diskriminante, nämlich die aus den Koeffizienten a_{ij} gebildete Determinante. Die Hessesche Determinante ist die Jacobische Determinante der abgeleiteten Formen:

$$f_1 = \frac{1}{n} \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, f_r = \frac{1}{n} \frac{\partial f}{\partial x_r}.$$

Die Resultante D dieser Formen heißt die *Diskriminante* der Grundform f. Dieselbe ist eine Invariante vom Grade $r(n-1)^{r-1}$. Die Diskriminante einer Ternärform hat Gordan untersucht, *Münch. Ber.* **17** (1887), 477.

An neueren Werken, welche die allgemeine Theorie der Formen behandeln, nennen wir noch Elliot, *Algebra of Quantics,* Oxford 1895, Andoyer, *Théorie des Formes,* Paris 1898. Zu vergleichen sind auch die betreffenden Abschnitte aus H. Weber, *Algebra* und A. Capelli, *Algebra complementare.*

Von besonderem Interesse unter den Formen mit mehr als zwei Variablen sind die *Ternärformen*, da sie einerseits noch eine formal einfache Ausgestaltung erlauben und andererseits, indem man die Variablen x_1, x_2, x_3 als Punktkoordinaten in einer Ebene deutet, in der ebenen Geometrie eine anschauliche Deutung finden. Wir wollen uns fortan auf sie beschränken. Eine Zusammenfassung ihrer Theorie nach den symbolischen Methoden findet man in Clebschs *Vorlesungen über Geometrie,* hggb. von Lindemann (Leipzig 1876). Eine interessante Monographie über sie hat Study geliefert (*Methoden zur Theorie der ternären Formen,* Leipzig 1889).

Die Komitanten der ternären Formen lassen sich in einer ähnlichen Weise symbolisch darstellen wie die Komitanten der Binärformen, indem man sie formal auf solche Komitanten einer Reihe von Linearformen f_x, g_x, h_x ... zurückführt, welche für die Koeffizienten einer jeden dieser Linearformen vom n^{ten} Grade sind. Es ist z. B.:

$$f_x = f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3$$

anzunehmen, und außerdem wird die abkürzende Bezeichnung

$$(fgh) = \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix}$$

gewählt. Die kontragredienten Variablen werden durch die Festsetzung

$$u_1 = y_2 z_3 - y_3 z_2, \quad u_2 = y_3 z_1 - y_1 z_3, \quad u_3 = y_1 z_2 - y_2 z_1$$

eingeführt, aus der

$$u_x = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = (xyz)$$

folgt. Dies ist die *identische Kovariante.* Eine lineare Form der u wird mit u_α bezeichnet, sie läßt sich auch durch eine Determinante von der Gestalt (fgu) ersetzen. Die symbolischen Faktoren, die in einer Komitante vorkommen, lassen sich dann auf folgende vier Typen reduzieren:

1. Determinanten aus Koeffizienten der Linearformen vom Typus (fgh),
2. Linearformen der Variablen x vom Typus f_x,
3. Linearformen der Variablen u vom Typus (fgu),
4. die identische Kovariante u_x.

Für das Rechnen mit symbolischen Ausdrücken ist von Wichtigkeit der Satz, daß ein solcher Ausdruck, wenn er bei Vertauschung zweier gleichwertigen Symbole sein Vorzeichen ändert, identisch verschwindet. Ferner gelten die folgenden Identitäten, die, solange man

$$f_x, g_x, h_x, k_x, l_x, m_x$$

als wirkliche lineare Formen auffaßt, als einfache Determinantenrelationen anzusehen sind:

I. $(fgh)k_x - (ghk)f_x + (hkf)g_x - (kfg)h_x = 0.$

II. $(fgh)(klm) - (ghk)(flm) + (hkf)(glm) - (kfg)(hlm) = 0.$

III. $(fgu)h_x + (hfu)g_x + (ghu)f_x = (fgh)u_x.$

Von diesen drei Gleichungen sind die beiden letzten einfache Folgen der ersten. Hierzu kommt

IV. $$(fgu) = f_y g_z - g_y f_z,$$

wenn u_1, u_2, u_3 die oben angegebene Bedeutung haben und die den Multiplikationssatz der Determinanten ausdrückende Gleichung:

V. $$(fgh)(xyz) = \begin{vmatrix} f_x & g_x & h_x \\ f_y & g_y & h_y \\ f_z & g_z & h_z \end{vmatrix}.$$

Für die angeschriebenen Relationen ist es gleichgültig, welche Größen als konstant und welche als veränderlich angesehen werden. Man kann also aus ihnen neue Gleichungen ableiten, indem man die Koeffizienten der Linearformen $f, g, h \ldots$ durch kontragrediente Variablen $u, v, w \ldots$ und, wenn man will, x, y, z durch Konstante $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ ersetzt. Man hat dabei eine Beziehung

$$x_1 = v_2 w_3 - v_3 w_2, \quad x_2 = v_3 w_1 - v_1 w_3, \quad x_3 = v_1 w_2 - v_2 w_1$$

vorauszusetzen. Auch kann man in der Gleichung II für $f, g, h, k \ldots$ Variable $x, y, z, t \ldots$ einsetzen, ebenso in der Gleichung I, indem man gleichzeitig für x umgekehrt f nimmt, so daß man die Gleichung erhält:

VI. $$(xyz)f_t - (yzt)f_x + (ztx)f_y - (txy)f_z = 0.$$

Damit aber sind die symbolischen Identitäten erschöpft, indem alle weiterhin auftretenden auf die gefundenen zurückgeführt werden können wie von Study, *Math. Ann.* **30** (1887) 120, bewiesen wurde. Eine Erweiterung dieses Satzes gab Pascal, *Acc. dei Lincei*, *Rendic.* (4) **4** (1888) 119, *Memorie* (4) **5** (1888) 375.

Clebsch hat gezeigt, daß die allgemeinsten ternären Systeme sich auf solche Grundformen zurückführen lassen, die nur zwei Reihen kontragredienter Variablen x_1, x_2, x_3 und u_1, u_2, u_3 enthalten. Eine derartige Form stellt nach Clebschs Ausdruck, gleich Null gesetzt, einen *Konnex* dar, und in diesen allgemeinsten Gebilden wollte Clebsch den Abschluß der algebraischen ebenen Geometrie erblicken (*Gött. Nachr.* 1872, S. 429, *Math. Ann.* **6**, 1873, S. 205. Man vgl. die Darstellung bei Clebsch-Lindemann, 1. Bd., 7. Abt.).

Eine Ternärform läßt sich im Gegensatz zu einer Binärform im allgemeinen nicht in Linearfaktoren zerlegen. Die

Bedingungen, unter denen dies eintritt, haben untersucht Brill, *Gött. Nachr.* 1893, 757, *Math. Ver.* **5** (1897) 52, *Math. Ann.* **50** (1898) 157, Gordan, ebenda **45** (1894) 410.

Von großer Bedeutung für die Theorie der ternären Formen ist das *Clebschsche Übertragungsprinzip*, welches dazu dient, aus bekannten binären Komitanten spezielle invariante Bildungen eines Systems ternärer Formen abzuleiten. Dies Prinzip hat, auf einem Gedanken von Hesse (*Journ. f. Math.* **66** (1866) 15, *Ges. Abhdlgn.* S. 531) fußend, Clebsch im *Journ. f. Math.* **59** (1861) 1 aufgestellt. Vgl. auch Gundelfinger, *Math. Ann.* **6** (1873) 16.

Man reduziert hierbei eine Ternärform, indem man in ihr

$$x_i = k_1 y_i + k_2 z_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

setzt und dann k_1, k_2 als Variable ansieht. So wird

$$f_x = k_1 f_y + k_2 f_z = k_1 \varphi_1 + k_2 \varphi_2 = \varphi_k,$$

und wenn man diese Gleichung symbolisch in die n^{te} Potenz erhebt,

$$f_x^n = \varphi_k^n.$$

Analog nehmen wir $g_x^n = \psi_k^n, \ldots$ an und lassen nachher $f_x^n, g_x^n, \ldots$ einerseits und $\varphi_k^n, \psi_k^n, \ldots$ anderseits zusammenfallen. Nun wird

$$(\varphi\psi) = \varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1 = f_y g_z - f_z g_y = (fgu) \text{ (nach IV).}$$

Eine Komitante der Binärform φ_k^n setzt sich aber aus symbolischen Faktoren vom Typus $(\varphi\psi)$ und φ_k zusammen. Wenn man dann für diese Faktoren die gefundenen Werte (fgu) und f_x einsetzt, ergibt sich eine Komitante der Ternärform $f = f_x^n$. So findet man die folgende formale Vorschrift, um aus dem symbolischen Ausdrucke einer Komitante einer Binärform eine Komitante (im allgemeinen eine Divariante) einer Ternärform gleicher Ordnung abzuleiten:

Man deute die symbolischen Faktoren f_x in jenem Ausdrucke auf drei Variable und hänge den Faktoren (fg) ein Symbol u an, so daß sie aus zweireihigen Determinanten zu dreireihigen Determinanten (fgu) werden. Der entstehende Ausdruck ist eine Divariante der Ternärform f, die aus der Binärform entsteht, indem man in ihrem symbolischen Ausdrucke f_x^n das f_x statt auf zwei auf drei Variable deutet.

Wir gehen nun zur Betrachtung der einfachsten Ternärformen über.

§ 7. Besondere ternäre Systeme.

Eine *quadratische Ternärform*

$$f = \sum a_{ij} x_i x_j \qquad (i, j = 1, 2, 3)$$

hat zwei invariante Bildungen: eine Invariante

$$D = 6 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

und eine Kontravariante

$$F = -\tfrac{1}{2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix},$$

die wir, als quadratische Form der kontragredienten Variablen u, schreiben wollen:

$$F = \sum \alpha_{ij} u_i u_j \qquad (i, j = 1, 2, 3).$$

Ist nun eine zweite quadratische Form der x

$$f' = \sum a'_{ij} x_i x_j \qquad (i, j = 1, 2, 3)$$

gegeben, so erhalten wir auch für sie eine Invariante D' und eine Kontravariante:

$$F' = \sum \alpha'_{ij} u_i u_j \qquad (i, j = 1, 2, 3).$$

Der Aronholdsche Prozeß liefert dann zwei *simultane Invarianten* beider Formen:

$$E = \sum \frac{\partial D}{\partial a_{ij}} a'_{ij}, \quad E' = \sum \frac{\partial D'}{\partial a'_{ij}} a_{ij}$$

und eine simultane (wiederum quadratische) Kontravariante:

$$H = \sum \frac{\partial F}{\partial a_{ij}} a'_{ij} = \sum \frac{\partial F'}{\partial a'_{ij}} a_{ij}.$$

Man erhält weiter zwei (bilineare) Divarianten

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial f'}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial u_2}\frac{\partial f'}{\partial x_2} + \frac{\partial F}{\partial u_3}\frac{\partial f'}{\partial x_3}\right),$$

$$\mathfrak{B}' = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial F'}{\partial u_1}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial F'}{\partial u_2}\frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial F'}{\partial u_3}\frac{\partial f}{\partial x_3}\right),$$

und aus diesen zwei neue Divarianten

$$\mathfrak{C} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial x_1} & u_1 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial x_2} & u_2 \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} & \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial x_3} & u_3 \end{vmatrix}, \qquad \mathfrak{C}' = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{\partial f'}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathfrak{B}'}{\partial x_1} & u_1 \\ \frac{\partial f'}{\partial x_2} & \frac{\partial \mathfrak{B}'}{\partial x_2} & u_2 \\ \frac{\partial f'}{\partial x_3} & \frac{\partial \mathfrak{B}'}{\partial x_3} & u_3 \end{vmatrix}.$$

Ersetzt man in $\mathfrak{B}$ x_i durch $\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial u_i}$, so erhält man dasselbe, wie wenn man in $\mathfrak{B}'$ x_i durch $\frac{1}{2}\frac{\partial F'}{\partial u_i}$ ersetzt $(i = 1, 2, 3)$. Man bekommt so eine Kontravariante $\mathfrak{P}$ dritter Klasse, die das Eigentümliche hat, daß sie in drei Linearfaktoren zerfällt.

Wir finden weiter zwei Divarianten:

$$\varphi = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f'}{\partial x_1} & u_1 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f'}{\partial x_2} & u_2 \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} & \frac{\partial f'}{\partial x_3} & u_3 \end{vmatrix}, \qquad \Phi = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u_1} & \frac{\partial F'}{\partial u_1} & x_1 \\ \frac{\partial F}{\partial u_2} & \frac{\partial F'}{\partial u_2} & x_2 \\ \frac{\partial F}{\partial u_3} & \frac{\partial F'}{\partial u_3} & x_3 \end{vmatrix}.$$

Wir können nun von F, F' ausgehend dieselben Bildungen wiederholen, die wir für f, f' aufgestellt haben. An die Stelle der Koeffizienten a_{ij}, a'_{ij} treten dann die α_{ij}, α'_{ij}, an die Stelle der x die u und umgekehrt. Die den D, D' entsprechenden Invarianten werden dabei bis auf einen Zahlfaktor deren Quadraten D^2 und D'^2 gleich. Die den F, F' korrespondierenden Kontravarianten $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{f}'$ werden bis auf einen Zahlfaktor die Formen Df, $D'f'$, die $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ reproduzieren sich, φ, Φ gehen ineinander über, an die Stelle von H tritt:

$$\mathfrak{h} = \sum \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \alpha_{ij}}\alpha'_{ij} = \sum \frac{\partial \mathfrak{f}'}{\partial \alpha'_{ij}}\alpha_{ij},$$

also eine quadratische simultane Kovariante der Urformen, und an die Stellen von $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$ treten zwei Divarianten $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}'$.

Anstatt der Kontravariante $\mathfrak{P}$ erhält man, indem man in $\mathfrak{B}'$ u_i durch $\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_i}$ oder in $\mathfrak{B}$ u_i durch $\frac{1}{2}\frac{\partial f'}{\partial x_i}$ ersetzt, eine Kovariante Π, die ebenfalls in drei Linearfaktoren zerfällt. Nennt man diese Linearfaktoren a_x, b_x, c_x, und die von $\mathfrak{P}$ u_α, u_β, u_γ, so wird bis auf einen Zahlfaktor:

$$\mathfrak{P} = (bcu) \cdot (cau) \cdot (abu),$$
$$\Pi = (\beta\gamma x) \cdot (\gamma\alpha x) \cdot (\alpha\beta x),$$

gleichzeitig werden f, f' von der Form:

$$f = l a_x^2 + m b_x^2 + n c_x^2, \quad f' = l' a_x^2 + m' b_x^2 + n' c_x^2,$$

und F, F' von der Form:

$$F = \lambda u_\alpha^2 + \mu u_\beta^2 + \nu u_\gamma^2, \quad F' = \lambda' u_\alpha^2 + \mu' u_\beta^2 + \nu' u_\gamma^2.$$

Das *System zweier quadratischer Ternärformen* haben behandelt Rosanes, *Math. Ann.* **6** (1873) 264, Gordan, *Math. Ann.* **19** (1882) 529, Perrin, *Bull. de la Soc. math. de France* **18** (1890) 1, Gerbaldi, *Annali di mat.* (2) **17** (1890) 161.

Das *System dreier quadratischer Ternärformen* haben untersucht Gundelfinger, *Journ. f. Math.* **80** (1875) 141, Ciamberlini, *Giorn. di mat.* **24** (1886) 141, Mertens, *Wien. Sitzungsber.* **93** (1886) 62, **99** (1890) 367, Gerbaldi, *Giorn. di Mat.* **27** (1889) 33, *Torino Atti* **25** (1890) 390, Fischer u. Mumelter, *Monatsh. f. Math.* **8** (1897) 97. Über die Resultante dreier quadratischen Ternärformen vgl. noch Sylvester, *Cambr. Dubl. Math. J.* **8** (1853) 256, *Werke* **1** 411, Cayley, *Journ. f. Math.* **57** (1860) 139, *Papers* **4**, 349, Gordan, *Journ. de math.* (5) **3** (1897) 97.

Die *kubische Ternärform* ist zuerst von Hesse bei seinen Untersuchungen über die Kurven dritter Ordnung (*Journ. f. Math.* **28**, 68, 97, **36**, 143, **38**, 241, **41**, 285, *Werke* 89, 123, 155, 193, 219) behandelt und das System ihrer invarianten Bildungen ist sodann von Aronhold in einer klassischen Arbeit (*Journ. f. Math.* **55** (1858) 93) so gut wie vollständig entwickelt worden. Es ist interessant, mit dieser Abhandlung die vollentwickelte Symbolik in den gewissermaßen abschließenden Arbeiten von Clebsch und Gordan über denselben Gegenstand, *Math. Ann.* **1** (1869) 57, **6** (1873) 436, zu vergleichen. Man sehe auch Gundelfinger, *Math. Ann.* **4** (1871) 144, **8** (1875) 136, Harnack, *Math. Ann.* **9** (1876) 218 und weiter Thomae, *Leipz. Ber.* **51** (1899) 317, Gordan, *Am. Math. Soc. Trans.* **1** (1900) 9, White, ebenda **1** (1900) 170, endlich in betreff des algebraischen Problems, das sich an die Wendepunkte der ebenen Kurve dritter Ordnung knüpft, Clebsch, *Journ. f. Math.* **58** (1861) 229, *Math. Ann.* **2** (1870) 382, Gundelfinger, *Math. Ann.* **5** (1872) 442.

Wir schreiben eine *kubische Ternärform*:

$$f = \sum_i \sum_j \sum_k a_{ijk} x_i x_j x_k \qquad (i, j, k = 1, 2, 3)$$

und setzen symbolisch:

$$f = f_x^3 = g_x^3 = h_x^3 = k_x^3 = f_x'^3 = g_x'^3 = h_x'^3.$$

Die Form hat dann zunächst zwei unabhängige Invarianten:

$$\text{(a)} \qquad \begin{aligned} S &= (fgh)(fgk)(fhk)(ghk), \\ T &= (fgh)^2 (f'g'h)(f'h'g)(g'h'f)(f'g'h'). \end{aligned}$$

Aus diesen leitet man eine absolute Invariante $\frac{S^3}{T^2}$ ab und die Diskriminante

$$D = T^2 - \frac{1}{6} S^3.$$

Indem man die Linearform k_x durch u_x ersetzt, leitet man aus der Invariante S die Kontravariante ab:

$$\text{(b)} \qquad \Sigma = (fgh)(fgu)(fhu)(ghu),$$

und, indem man h_x' durch u_x ersetzt, aus T:

$$\text{(b}'\text{)} \qquad \mathsf{T} = (fgh)^2 (f'g'h)(fg'u)(f'gu)(f'g'u).$$

Nicht symbolisch ist:

$$\text{(b}''\text{)} \qquad \begin{aligned} \Sigma &= \tfrac{1}{4} \sum \frac{\partial S}{\partial a_{ijk}} u_i u_j u_k, \\ \mathsf{T} &= \tfrac{1}{6} \sum \frac{\partial T}{\partial a_{ijk}} u_i u_j u_k. \end{aligned}$$

Die Hessesche Kovariante

$$\text{(c)} \qquad H = (fgh)^2 f_x g_x h_x$$

ist wie die Urform von der dritten Ordnung. Ist $S = 0$, so zerfällt H in drei Linearfaktoren. Wenn $T = 0$ ist, wird die Hessesche Kovariante von H bis auf einen Zahlfaktor wieder die Urform f. Nicht symbolisch ist, wenn

$$f_{ij} = \frac{1}{6} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

gesetzt wird,

$$(c') \qquad H = 6 \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix}.$$

Wir nehmen

$$(c'') \qquad H = \sum_i \sum_j \sum_k b_{ijk} x_i x_j x_k.$$

Das Clebschsche Übertragungsprinzip liefert aus der quadratischen Kovariante einer kubischen Binärform die folgende Divariante der kubischen Ternärform:

$$(d) \qquad \Theta = (fgu)^2 f_x g_x,$$

die man auf nichtsymbolischem Wege in folgender Weise gewinnt:

$$(d') \qquad \Theta = -2 \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & u_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & u_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Setzt man nun weiter

$$\Theta_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_i \partial x_j},$$

welche Größen die x nicht mehr enthalten, so bekommt man eine neue Kontravariante (6. Klasse)

$$(e') \qquad F = -2 \begin{vmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & \Theta_{13} & u_1 \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} & \Theta_{23} & u_2 \\ \Theta_{31} & \Theta_{32} & \Theta_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix},$$

die in symbolischer Darstellung lautet:

$$(e) \qquad F = (fgu)^2 (hku)^2 (fhu)(gku).$$

Aus Θ läßt sich die Invariante S in folgender Weise ableiten:

$$(a') \qquad S = \frac{1}{16} \sum_{ij\mu\nu} \frac{\partial^4 \Theta}{\partial x_i \partial x_j \partial u_\mu \partial u_\nu} \cdot \frac{\partial^4 \Theta}{\partial x_\mu \partial x_\nu \partial u_i \partial u_j}.$$

Wir wenden nun den Aronholdschen Prozeß in der Weise an, daß wir ihn auf die Koeffizienten der Urform f und der

Hesseschen Kovariante H beziehen. Wir definieren ihn also dadurch, daß

$$\mathfrak{d}\,U = \sum \frac{\partial U}{\partial a_{ijk}} b_{ijk}$$

gesetzt wird. Dieser Definition nach ist

$$\text{(f)} \qquad \mathfrak{d} f = H.$$

Umgekehrt wird

$$\text{(f')} \qquad \mathfrak{d} H = \tfrac{1}{2} S \cdot f$$

und weiter

$$\text{(g)} \qquad \mathfrak{d}\Sigma = 3\mathsf{T}, \qquad \mathfrak{d}\mathsf{T} = \tfrac{5}{6} S \cdot \Sigma.$$

$$\text{(h)} \qquad \mathfrak{d} S = 4\,T, \qquad \mathfrak{d} T = S^2.$$

Es geht also T aus S hervor wie folgt:

$$\text{(h')} \qquad T = \frac{1}{4} \sum \frac{\partial S}{\partial a_{ijk}} b_{ijk}.$$

Die Diskriminante D läßt sich durch die Koeffizienten der Urform f und ihrer Hesseschen Form H unsymbolisch in sehr übersichtlicher Weise darstellen. Es wird:

$$D = 36 \begin{vmatrix} a_{111} & a_{122} & a_{133} & a_{123} & a_{131} & a_{112} \\ a_{211} & a_{222} & a_{233} & a_{223} & a_{231} & a_{212} \\ a_{311} & a_{322} & a_{333} & a_{323} & a_{331} & a_{312} \\ b_{111} & b_{122} & b_{133} & b_{123} & b_{131} & b_{112} \\ b_{211} & b_{222} & b_{233} & b_{223} & b_{231} & b_{212} \\ b_{311} & b_{322} & b_{333} & b_{323} & b_{331} & b_{312} \end{vmatrix}.$$

Die Formeln (c′) (d′) (e′) (a′) (h′) (b″) bezeichnen den Weg, den man zu gehen hat, um die Kombinanten ohne Zuhilfenahme der Aronholdschen Symbolik zu gewinnen.

Wir vereinigen nun die Form f und ihre Hessesche H zu der Form

$$f_{\varkappa\lambda} = \varkappa f + \lambda H.$$

Alle Formen, die wir so erhalten, bilden das *syzygetische Formenbüschel* von f.

Wir suchen die Komitanten der Form $f_{\varkappa\lambda}$ auszudrücken durch die Komitanten von f und die Parameter $\varkappa, \lambda$. Zu dem Zwecke führen wir zunächst die folgenden Formen von $\varkappa, \lambda$ ein:

$$G_{\varkappa\lambda} = \varkappa^4 - S\varkappa^2\lambda^2 - \tfrac{4}{3}T\varkappa\lambda^3 - \tfrac{1}{12}S^2\lambda^4,$$

$$L_{\varkappa\lambda} = S\varkappa^2 + 2T\varkappa\lambda + \tfrac{1}{6}S^2\lambda^2,$$

$$M_{\varkappa\lambda} = \varkappa^3 + \tfrac{1}{2}S\varkappa\lambda^2 + \tfrac{2}{3}T\lambda^3,$$

$$N_{\varkappa\lambda} = 3\varkappa^2\lambda - \tfrac{1}{2}S\lambda^3,$$

zwischen denen die identische Beziehung besteht

$$G_{\varkappa\lambda} + \lambda^2 L_{\varkappa\lambda} = \varkappa M_{\varkappa\lambda} - \tfrac{1}{6}S\lambda N_{\varkappa\lambda}.$$

Dann werden die Invarianten von $f_{\varkappa\lambda}$

$$S_{\varkappa\lambda} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial L_{\varkappa\lambda}}{\partial\varkappa} M_{\varkappa\lambda} + \frac{\partial L_{\varkappa\lambda}}{\partial\lambda} N_{\varkappa\lambda}\right),$$

$$T_{\varkappa\lambda} = \frac{1}{16}\left[\frac{\partial G_{\varkappa\lambda}}{\partial\varkappa}\,\frac{\partial S_{\varkappa\lambda}}{\partial\lambda} - \frac{\partial G_{\varkappa\lambda}}{\partial\lambda}\,\frac{\partial S_{\varkappa\lambda}}{\partial\varkappa}\right],$$

und die Diskriminante

$$D_{\varkappa\lambda} = D\cdot G^3_{\varkappa\lambda}.$$

Die Hessesche Kovariante wird

$$H_{\varkappa\lambda} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial G_{\varkappa\lambda}}{\partial\varkappa} H - \frac{\partial G_{\varkappa\lambda}}{\partial\lambda} f\right),$$

und wir finden die Kontravarianten

$$\Sigma_{\varkappa\lambda} = M_{\varkappa\lambda}\Sigma + N_{\varkappa\lambda}\mathrm{T},$$

$$\mathrm{T}_{\varkappa\lambda} = \frac{1}{12}\left[\frac{\partial G_{\varkappa\lambda}}{\partial\varkappa}\cdot\frac{\partial \Sigma_{\varkappa\lambda}}{\partial\lambda} - \frac{\partial G_{\varkappa\lambda}}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial \Sigma_{\varkappa\lambda}}{\partial\varkappa}\right].$$

Besonders ausgezeichnet ist die biquadratische Form $G_{\varkappa\lambda}$. Wir finden ihre Invarianten:

$$i_g = 0, \qquad j_g = -\tfrac{1}{9}D.$$

Gleichzeitig wird die Diskriminante der quadratischen Form $L_{\varkappa\lambda}$ gleich $-2D$.

Die Hessesche Kovariante von $G_{\varkappa\lambda}$ ist

$$H_g = -\tfrac{1}{3}S_{\varkappa\lambda},$$

ihre Kovariante sechster Ordnung:

$$T_g = -\tfrac{1}{3}T_{\varkappa\lambda}.$$

Über die *biquadratische Ternärform* vgl. die Monographie von Pascal, *Napoli Atti* (2) **12** (1905) No. 13, woselbst auch die weitere Literatur angegeben ist.

Über *quaternäre Formen* vgl. man Mertens, *Wiener Sitzungsber.* **98** (1889) 691.

Zuletzt wollen wir die *kanonische Darstellung der Ternärformen* an zwei Beispielen erörtern.

Als die kanonische Darstellung einer kubischen Ternärform wird gewöhnlich die von Hesse (*Journ. f. Math.* **28** (1844) 68, *Werke* S. 115) herrührende Gestalt angesehen:

$$f = X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 + 6k X_1 X_2 X_3 .$$

Die Invarianten der Form sind dann

$$S = 24k(k^3 - 1), \qquad T = 6(8k^6 + 20k^3 - 1),$$

und die Diskriminante wird

$$D = 36(1 + 8k^3)^3.$$

Die Hessesche Kovariante lautet

$$H = -6[k^2(X_1^3 + X_2^3 + X_3^3) - (1 + 2k^3)X_1 X_2 X_3],$$

ferner wird in den kontragredienten Variabeln u_1, u_2, u_3

$$\Sigma = -6[k(U_1^3 + U_2^3 + U_3^2) + (1 - 4k^3)U_1 U_2 U_3],$$

$$\mathrm{T} = 2(10k^3 - 1)(U_1^3 + U_2^3 + U_3^2) + 4k^2(4k^3 + 5)U_1 U_2 U_3 .$$

Um k zu bestimmen, setzt man

$$x = 6k^2,$$

dann ist x eine Wurzel der Gleichung vierten Grades:

$$x^4 - Sx^2 - \tfrac{4}{3}Tx - \tfrac{1}{12}S^2 = 0,$$

und zwar ergibt sich

$$x = \pm\sqrt{\tfrac{1}{6}(S + \sqrt[3]{6D})} \pm \sqrt{\tfrac{1}{6}(S + \varepsilon\sqrt[3]{6D})} \pm \sqrt{\tfrac{1}{6}(S + \varepsilon^2\sqrt[3]{6D})},$$

wenn ε eine primitive dritte Einheitswurzel bedeutet. Die Transformation auf die kanonische Form wird darauf gefunden aus der Identität

$$6(1 + 8k^3)X_1 X_2 X_3 = H + 6k^2 f,$$

aus dieser folgt, daß X_1, X_2, X_3 den drei Linearfaktoren, in welche $H + 6k^2 f$ zerfällt, proportional sind.

Für $S = 0$ läßt sich die kubische Form f auf die Summe dreier Kuben

$$f = X_1^3 + X_2^3 + X_3^3.$$

reduzieren. Wenn $S \neq 0$, ist diese Darstellung unmöglich, wohl aber läßt sich die Form auf unendlich viele Arten als Summe von vier Kuben darstellen.

Eine Ternärform vierter Ordnung, die wir in ihrer allgemeinen Gestalt schreiben:

$$f = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l a_{ijkl}\, x_i x_j x_k x_l \qquad (i, j, k, l = 1, 2, 3)$$

läßt sich auf die Summe der vierten Potenzen von *fünf* Linearformen zurückführen, wenn die folgende Invariante verschwindet:

$$B = \begin{vmatrix} a_{1111} & a_{1122} & a_{1133} & a_{1123} & a_{1131} & a_{1112} \\ a_{2211} & a_{2222} & a_{2233} & a_{2223} & a_{2231} & a_{2212} \\ a_{3311} & a_{3322} & a_{3333} & a_{3323} & a_{3331} & a_{3312} \\ a_{2311} & a_{2322} & a_{2333} & a_{2323} & a_{2331} & a_{2312} \\ a_{3111} & a_{3122} & a_{3133} & a_{3123} & a_{3131} & a_{3112} \\ a_{1211} & a_{1222} & a_{1233} & a_{1223} & a_{1231} & a_{1212} \end{vmatrix}.$$

Ist $B \neq 0$, so ist die Form nur auf die Summe von *sechs* vierten Potenzen zurückführbar. Man kann ihr aber auch die Gestalt geben:

$$f = \varphi(x_1^2, x_2^2, x_3^2) + x_1 x_2 x_3 x_4,$$

wo φ eine quadratische Form der dahinterstehenden Argumente und x_4 eine Linearform bedeutet. Nur in besonderen Fällen läßt sich f auf eine quadratische Form φ der Quadrate x_1^2, x_2^2, x_3^2 reduzieren.

Die Ternärform f vierter Ordnung besitzt eine ausgezeichnete Kovariante vierter Ordnung S, die Clebsch entdeckt und studiert hat, *Journ. f. Math.* **67** (1867) 360. Ist f auf eine lineare Verbindung

$$f = \sum_{i=1}^{5} a_i x_i^4$$

der vierten Potenzen von fünf Linearformen x_i zurückführbar, so wird S von der Form:

$$S = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \sum_1^5 \frac{a_i}{x_i}.$$

Ist $f = \varphi(x_1^2, x_2^2, x_3^2)$, so wird S von der gleichen Form $S = \psi(x_1^2, x_2^2, x_3^2)$. S fällt nur dann mit f bis auf einen konstanten Faktor zusammen, wenn f ein vollständiges Quadrat oder von der Gestalt

$$f = x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1$$

ist. Diese besondere Form, die durch eine Gruppe von 168 linearen Transformationen in sich übergeht (vgl. S. 242), ist von Klein, *Math. Ann.* **14** (1879) 437 ff., *Theorie der elliptischen Modulfunktionen* I, S. 701 ff., und von Gordan, *Math. Ann.* **17** (1880) 217, 359, **20** (1882) 487, behandelt worden.